

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Behmann, Heinrich:** Sind die mathematischen Urteile analytisch oder synthetisch? Erkenntnis 4, 1—27 (1934).

In einer an den strengerem Anforderungen der Logistik orientierten Auseinandersetzung mit der von Kant gegebenen klassischen Begriffsbestimmung definiert der Verf. ein „analytisches Urteil“ als ein solches, „das nach Ersetzung der vorkommenden definierten Begriffe durch ihre Definitionen in den Grundbegriffen sich als ein rein logisches Gesetz oder ein Anwendungsfall eines solchen darstellt.“ — Sodann werden zunächst die bekannten Überlegungen skizziert, die zur Unterscheidung zwischen der Geometrie als mathematischer Disziplin und der Geometrie als empirischer Theorie der räumlichen Seite der Erfahrungswirklichkeit führen und die ferner ergeben, daß jeder Satz der mathematischen Geometrie in der angemessenen implikativen Darstellung (Konjunktion der Axiome als Implikans, der betreffende Satz als Implikat) ein analytisches Urteil darstellt. — Schließlich entwickelt der Verf. die Grundzüge eines Beweises für die (logizistische) These, daß jede Formel der Arithmetik sich mittels rein logischer Begriffe darstellen und sich überdies als ein analytisches Urteil erweisen lasse. Der angedeutete Gedankengang schließt sich i. a. ausdrücklich an die einschlägigen Überlegungen von Frege und von Russell-Whitehead an; wesentliche Abweichungen bestehen vor allem in folgenden Punkten: 1. In der Liste der Grundbegriffe, die für den vom Verf. angedeuteten gemeinsamen Aufbau von Logik und Mathematik erforderlich sind, treten 2 modalitätslogische Grundbegriffe — „ $p$  ist logisch notwendig“, „ $p$  ist logisch möglich“ — auf (über ihre Stellung im formalen System enthält der vorliegende Aufsatz keine näheren Angaben); 2. unter Hinweis auf eine frühere Veröffentlichung [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig 40, 37—48 (1931); dies. Zbl. 1, 50] deutet der Verf. an, daß ein Aufbau der Arithmetik im Sinne des Logizismus unter Verzicht auf die Russellsche Typentheorie möglich sei, und daß auf diese Weise einerseits das problematische Reduzibilitätsaxiom fortfalle und andererseits das Unendlichkeitsaxiom ein „aus Axiomen unzweifelhaft logischer Natur beweisbarer —, also analytischer Satz“ werde. Das dritte der problematischen Axiome des Russellschen Aufbaus der Arithmetik schließlich, das Auswahlaxiom, lasse zwei Deutungen zu: entweder als Aussage über „Klassen an sich“, — und dann werde es in dem vom Verf. angedeuteten Aufbau ein „denknotwendiger, also analytischer Satz“ — oder als verkappte Aussage über Satzfunktionen — und dann sei der Auswahlatz eine zweckmäßige Fiktion, aber kein Urteil. So könne die bekannte Problematik des logizistischen Aufbaus der Mathematik behoben und die These endgültig bewiesen werden, daß alle Urteile der reinen Mathematik analytisch sind. C. G. Hempel (z. Zt. Brüssel).

**Dassen, C. C.:** Réflexions sur quelques antinomies et sur la logique empiriste. An. Acad. Nac. Ci. exact. Fis. y Nat., Buenos Aires 3, 39—70 u. 73—128 (1933).

Der Verf. beschäftigt sich — in engem Anschluß an Gönseth (Les Fondements des Mathématiques. 1926) — mit den Prinzipien des Intuitionismus. Der Standpunkt des Verf. zu den Grundlagenfragen der Mathematik wird durch die folgenden beiden Sätze seiner Arbeit gekennzeichnet (deren letzter ein Zitat de la Vallée-Poussins darstellt): „Pour ma part, je crains fort que comme cela arrive souvent, on ne joue ici“ (bei der Auseinandersetzung Hilbert/Brouwer-Weyl) „sur les mots, et même que, en voulant trop approfondir le mystère de l'intellect, on ne finisse par aller à l'encontre du sens commun“ und „... notre intuition du nombre pur. C'est donc sur cette abstraction, et sur cette abstraction seule, qu'il faut faire reposer, pour lui assurer la rigueur, l'édifice entier de la science exacte.“ — Zunächst geht der Verf. auf die



Paradoxien ein, wobei seine Argumentationen sich jener Argumentationsweise einordnen, die sich um den Terminus „in sich widerspruchsvoller Subjektsbegriff“ gruppiert. Bei der dann folgenden Betrachtung der intuitionistischen Einstellung zum Satz vom ausgeschlossenen Dritten wird der Begriff „tierce démontrable“ (der Fall, in dem man für einen vorgelegten Satz beweisen kann, daß er weder allgemein beweisbar noch widerlegbar ist) in den Vordergrund gerückt, welcher zunächst in axiomatischer, dann aber auch in intuitionistischer Gestalt (vgl. Heyting, *Bull. Cl. Sci. Acad. Belgique*, 1930) behandelt wird. — Nach Darlegung seines Standpunktes setzt sich der Verf. eingehend mit einschlägigen Arbeiten von Wavre, P. Lévy, Borel, Barzin und Errera, Avsitidysky, Glivenko und Heyting auseinander. *Schmidt*.

**Schütte, Kurt: Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.** *Math. Ann.* **109**, 572—603 (1934).

Das Entscheidungsproblem für den Prädikatenkalkül läßt sich bekanntlich auf dasjenige für die pränexen Formeln (bei denen die Quantoren voranstellen) zurückführen, welche sich nach der Struktur ihre Pränexes klassifizieren lassen. Abgesehen von der Lösung des Entscheidungsproblems für den einstelligen Prädikatenkalkül und von einem speziellen Ansatz (s. dies. Zbl. **3**, 290) ordnen sich alle bisherigen Teillösungen dieser Klassifikation ein; und in jedem Falle hat man die Alternative „widerlegbar oder im Endlichen erfüllbar“ bewiesen. Es handelt sich um die Fälle  $[k, l \geq 0]$ :

$$\begin{aligned} & (E x_1) \dots (E x_k) (y_1) \dots (y_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, y_l), \\ & (E x_1) \dots (E x_k) (y) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, z_l), \\ & (E x_1) \dots (E x_k) (y_1) (y_2) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(x_1, \dots, z_l) \text{ [Klasse } \mathfrak{R}]. \end{aligned}$$

Für die Klasse  $\mathfrak{R}$  wurde das Entscheidungsproblem zunächst ohne die genannte Alternative von Gödel (*Erg. math. Kolloqu.*, Heft 2) und von Kalmár (*Math. Ann.* **108**; s. dies. Zbl. **6**, 385) gelöst, dann bewies Gödel (*Mh. Math. Phys.* **40**, s. dies. Zbl. **8**, 289) auch die Alternative für  $\mathfrak{R}$ , und die vorliegende Arbeit stellt schließlich eine Lösung des Problems im Sinne der Alternative auf rein finitem Wege dar. (Die 3 Autoren gelangten voneinander unabhängig zu ihrem Ergebnis.) Der Verf. zeigt weiter, daß die Alternative in keiner Klasse pränexer Formeln, die von den oben aufgeführten Klassen verschieden ist, allgemein gilt. — Schüttes Lösung für  $\mathfrak{R}$  wird in 3 Schritten erreicht: 1. Das Entscheidungsproblem für  $\mathfrak{R}$  wird im scharfen Sinne der Alternative (durch finite Verschärfung einer Ackermannschen Methode, *Math. Ann.* **100**) auf den Fall  $k = 0$  zurückgeführt, welcher ja ein Spezialfall des Problems für

$$(y_1) \dots (y_m) (E z_1) \dots (E z_l) \mathfrak{A}(y_1, \dots, z_l)$$

ist. 2. Für die Unwiderlegbarkeit solcher Formeln wird eine notwendige und (unter Verwendung des Herbrandschen Satzes, s. dies. Zbl. **3**, 49) eine stärkere hinreichende Bedingung gegeben. Bei  $m = 2$  fallen beide Bedingungen zusammen. 3. Der letzte Schritt, nämlich die Verschärfung des so erhaltenen Entscheidungsverfahrens für  $m = 2$  zum Nachweis der genannten Alternative, wird erst in einer Fortsetzung der vorliegenden Arbeit veröffentlicht werden. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Bornstein, Benedykt: Harmonische Elemente in der geometrischen Logik.** *Bull. sci. École polytechn. Timişoara* **5**, 78—87 (1934).

Die Definition des harmonischen Mittels aus dem arithmetischen Mittel wird in Analogie zu der aussagenlogischen Formel  $a + b = (a' \cdot b')'$  gesetzt. Unter Heranziehung eines geometrischen Modells für die aussagenlogischen Verknüpfungen  $+$ ,  $\cdot$ ,  $'$  der Werte 0, 1,  $a$ ,  $b$  (welchem gewisse Inkonssequenzen anhaften), findet der Verf. auch zum geometrischen Mittel der Arithmetik einen (mit Einschränkung) analogen aussagenlogischen Ausdruck; und in heuristischer Verfolgung dieser Analogien gelangt er zu gewissen einfachen Sätzen über Mittel, die man durch Ausrechnen bestätigt.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).



**Noteutt, Bernard:** A set of axioms for the theory of deduction. *Mind* 43, 63—77 (1934).

Verf. ist der Meinung, daß in den üblichen Darstellungen formaler Systeme gewisse zu ihrer Handhabung notwendige Regeln stillschweigend vorausgesetzt werden (z. B. daß die Formeln von links nach rechts zu lesen sind) und stellt ein Axiomensystem für den Aussagenkalkül auf, das von diesem Mangel frei sein soll, d. h. in dem „nichts der Intelligenz des Lesers überlassen ist, sondern alle Annahmen explizit formuliert werden“. Ein zweiter Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der (verzweigten) Typentheorie. Es werden sog. „intertypical variables“ eingeführt, d. h. Variable, die gleichzeitig über alle möglichen Typen laufen. Um Widersprüche zu vermeiden, dürfen diese Variablen niemals gebunden auftreten. Die „intertypical variables“ sollen das Reduzibilitätsaxiom überflüssig machen. *K. Gödel* (Princeton).

**Huntington, E. V.:** The postulational method in mathematics. *Amer. Math. Monthly* 41, 84—92 (1934).

In einem gegebenen Axiomensystem  $\mathfrak{A}$  mögen die Relationen  $R_i$  auftreten. Jeder in bezug auf die  $R_i$  definite Dingbereich gilt als zu  $\mathfrak{A}$  gehöriges „system“. Der Verf. gibt — an Hand einfacher, die geometrische Anordnung betreffender Beispiele — eine Übersicht über die drei wesentlichen Gesichtspunkte, unter denen er das Verhältnis eines Axiomensystems zu seinen systems betrachtet. Die Feststellung der Gültigkeit eines beliebigen einschlägigen Satzes in einem system wird dabei als bloße „observation“ aufgefaßt, bei der noch kein mathematischer Satz ins Spiel komme. — Alle zu einer axiomatischen Theorie  $\mathfrak{A}$  (auch die theory of deduction wird in dieser Weise behandelt) gehörigen „technischen“ Fragen, insbesondere consistency und complete independence, werden als Klassifikationsprobleme innerhalb der Klasse aller systems von  $\mathfrak{A}$  gedeutet. Wenn im Verfolg dieser Einstellung z. B. die Abhängigkeit von Sätzen durch das Leersein einer Teilklasse von systems definiert wird, so liegt der vom Verf. benutzten Schreibweise die Auffassung zugrunde, dieses Leersein sei gleichbedeutend mit der Herleitbarkeit eines gewissen Widerspruchs. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Huntington, E. V.:** Independent postulates for the „informal“ part of Principia Mathematica. *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 127—136 (1934).

**Huntington, E. V.:** Independent postulates for an „informal Principia system with equality“. *Bull. Amer. Math. Soc.* 40, 137—142 (1934).

Die erste dieser Arbeiten wird vom Verf. als Vereinfachung und Erweiterung des Appendix II seiner Arbeit „New sets of independent postulates for the Algebra of Logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica“ bezeichnet; gerade dieses Appendix wurde in Zbl. 6, 242 ausführlich referiert. Der Verf. gibt zwei einander äquivalente Axiomensysteme an, die die „informal theory of the Principia“ formal wiedergeben sollen (vgl. hierzu eine Bemerkung des angegebenen Referats). In der zweiten Arbeit wird eines dieser Axiomensysteme durch Axiome für die logische Gleichheit erweitert, und es werden die Unabhängigkeiten sowie die Erfüllbarkeit nachgewiesen. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

## Algebra und Zahlentheorie.

**Touchard, J.:** Sur un problème de permutations. *C. R. Acad. Sci., Paris* 198, 631 bis 633 (1934).

Two permutations on  $n$  letters are said to be discordant if no letter occupies in one of them the same rank (rang) as it occupies in the other. The problem of enumerating the permutations  $P$  which are discordant with two given permutations  $A$  and  $B$  has been solved in particular cases by Cayley, Muir, Laisant, Moreau and Netto. In this note Touchard presents the general solution of the problem. *Carmichael*.

**Barletta, Silvio:** Contributo allo studio dei determinanti cubici. *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 71, 183—200 (1933).

A cubic matrix  $(a_{ijk})$  has three determinants according as  $i, j$  or  $k$  is fixed. Certain



elementary properties of cubic determinants are noted. A cubic determinant of order  $n$  in which  $a_{ijk} = a_p$ ,  $i + j + k - 2 \equiv p \pmod{n}$ ,  $0 < p \leq n$ , is called a circulant. It is proved that the three determinants of a circulant are equal, and if  $n$  is even, they vanish. A method is developed for expanding when  $n$  is odd. If  $a_{ijk} = a_j^{i-1}$ , the determinant is of the Vandermonde type. This is evaluated as a sum of products of differences of the elements.

MacDuffee (Columbus).

**Schoenberg, I. J.:** Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. Math. Z. 38, 546—564 (1934).

Es wird bewiesen, daß die von Jacobi auf ein endliches Intervall übertragene Regel von Descartes für die Anzahl der algebraischen Gleichungen niemals eine größere obere Schranke gibt, als der Budan-Fouriersche oder der Laguerresche Satz. Eine Bestimmung der allgemeinen Polynomenfolge, welche im Sinne von Pólya und Szegő (Aufgaben und Lehrsätze II, S. 52—53) der Descartesschen Regel genügen, zeigt die Überlegenheit der Descartes-Jacobischen Regel gegenüber einer ganzen Klasse von ähnlichen Sätzen. Diese Ergebnisse lassen sich auf Grund eines Satzes von Obreschkoff (Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 33, 61) auf komplexe Wurzeln übertragen. So gilt der Satz: Die Descartes-Jacobische Regel, der Budan-Fouriersche Satz und der Laguerresche Satz in bezug auf ein Intervall  $(\alpha, \beta)$  geben obere Schranken für die Anzahl derjenigen Wurzeln einer algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades mit reellen Koeffizienten, die innerhalb der Kreislinie liegen, von deren Rand man die Strecke  $\overline{\alpha\beta}$  unter dem Winkel  $\frac{n-1}{n}\pi$  sieht. — Für die Erweiterung des Budan-Fourierschen Satzes besagt ein anderer Satz von Obreschkoff (a. a. O., S. 63—64) mehr als der vorige Satz.

Sz. Nagy (Szeged).

**Anghelutza, Th.:** Sur une extension d'un théorème de Hurwitz. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 16, 119—121 (1934).

Diese „extension“ ist der folgende wohlbekannte Satz: Die absoluten Beträge der Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

liegen alle im abgeschlossenen Intervall  $(x_1, x_2)$ , wo  $x_1$  bzw.  $x_2$  die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$|a_0| x^n + |a_1| x^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| x - |a_n| = 0 \quad \text{bzw.} \quad |a_0| x^n - |a_1| x^{n-1} - \dots - |a_n| = 0$$

bedeutet.

Sz. Nagy (Szeged).

**Alaci, V.:** Quotient et reste de la division de deux polynômes. Bull. sci. École polytechn. Timișoara 5, 3—11 (1934).

Es werden die zwei Polynome  $Q(x)$  und  $R(x)$ , die sich als Quotient bzw. als Rest der Division eines Polynoms  $f(x)$  mit einem Polynom  $g(x)$  ergeben, durch die Koeffizienten von  $f(x)$  und  $g(x)$  ausgedrückt. Verf. entwickelt die Funktion  $1/g(x)$  in eine nach ganzen negativen Potenzen von  $x$  fortschreitende Reihe und bestimmt die Determinantenform der Koeffizienten in dieser Reihe. Multipliziert man diese Reihe mit  $f(x)$  bzw. mit  $f(x)$  und  $g(x)$ , so erhält man leicht die gesuchte Form von  $Q(x)$  bzw.  $R(x)$ .

Sz. Nagy (Szeged).

**Waerden, B. L. van der:** Noch eine Bemerkung zu der Arbeit „Zur Arithmetik der Polynome“ von U. Wegner in Math. Ann. 105, S. 628—631. Math. Ann. 109, 679—680 (1934).

Verf. widerlegt einen Satz von U. Wegner (Math. Ann. 106, 456): „Spaltet das ganzzahlige im Körper der rationalen Zahlen höchstens in zwei irreduzible Bestandteile zerlegbare Polynom  $f(x)$  ohne mehrfache Wurzeln für fast alle Primzahlmoduln mindestens einen rationalen Linearfaktor ab, so besitzt  $f(x)$  im Körper der rationalen Zahlen mindestens einen Linearfaktor.“ Das geschieht durch folgendes Gegenbeispiel:  $f(x) = (x^2 - D)(x^3 + ax + b)$ ,  $D = -4a^3 - 27b^3$ , wobei  $x^3 + ax + b$  irreduzibel und  $D$  kein vollständiges Quadrat ist. — In einem Zusatz verallgemeinert U. Wegner



dieses Gegenbeispiel folgendermaßen: Es sei  $f(x) = (x^2 - D)$ ,  $g(x)$ ,  $g(x)$  ein in  $k(1)$  irreduzibles Polynom vom Primzahlgrad  $l$ ,  $D$  (kein Quadrat!) die Diskriminante von  $g(x)$ . Ist die Gleichung  $g(x) = 0$  auflösbar, so spaltet  $f(x)$  für fast alle Primzahlmoduln mindestens einen rationalen Linearfaktor ab. — U. Wegner stellt sich die Frage, ob es dazu auch notwendig ist, daß  $g(x) = 0$  auflösbar ist, und will diese Frage in einer späteren Arbeit untersuchen. Hier handelt es sich darum, ob es nicht eine nicht auflösbare Gruppe vom Primzahlgrade  $l$  gibt, in welcher jede ungerade Permutation mindestens eine Ziffer festläßt.

N. Tschebotarow (Kasan).

**Turnbull, H. W.:** Power vectors. Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 106—146 (1934).

If  $y = f(x) = \alpha_0 + a_0 x + a_1 x^2 + \dots$ , then  $y^{i-1} = \sum_j f_{ij}(\alpha_0, a_0, \dots) x^{j-1}$ . The matrix  $F = [f_{ij}]$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), is called the induced matrix of order  $n$ . If  $U = [\delta_{i+1,j}]$  is the auxiliary unit matrix, and if  $\alpha_0 = 0$ , then  $Ff(U) = UF$ . This result extends to infinite matrices if  $f(x)$  is absolutely convergent. The equation  $Xf(U) = g(U)X$  is next considered. Application in the case  $f'(\lambda) \neq 0$  for each characteristic root of  $A$  is made to the problem of finding  $K$  in terms of  $H$  and  $f(C)$  when  $A = HCH^{-1}$ ,  $f(A) = KDK^{-1}$ ,  $C$  and  $D$  being in the classical canonical form. A connection is noted with the semiinvariants of a binary  $n$ -ic form. MacDuffee.

**Beller, Josef:** Beiträge zur Arithmetik der dreidimensionalen Vektoren. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 213—231 (1934).

Verf. untersucht in dieser Abhandlung aus Vektoren gebildete Ideale, die enge Beziehungen zur Theorie der ternären Formen haben, ähnlich wie die gewöhnlichen Ideale zur Theorie der binären. Sie werden durch dreigliedrige Vektormoduln definiert. Er gibt daraufhin die allgemeine Gestalt der Primärideale (das sind solche mit Primzahlpotenznormen) und deren Teiler an. Alle übrigen Ideale lassen sich leicht auf sie zurückführen. Es folgen dann Anwendungen orthogonaler Substitutionen auf die Vektoriale in Verbindung mit der Theorie der ternären Formen. Hierbei stellt er noch besondere Sätze für das Gesamtmaß (Summe der reziproken Werte der Zahl der Transformationen in sich) auf, die gelten, wenn die Klassenanzahl für ein Geschlecht gleich 1 ist. Am Schlusse zeigt er, daß eine Reihe von den von ihm aufgestellten Sätzen bekannten Sätzen der Quaternionentheorie entspricht und wendet dies besonders auf die Darstellung von Zahlen durch die quaternionäre Form  $x_0^2 + x_1^2 + m(x_2^2 + x_3^2)$  an.

G. Schrutka (Wien).

**Wachs, Sylvain:** Les systèmes linéaires d'équations unilatérales quaternioniennes. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1472—1474 (1934).

Verallgemeinerung der von E. Study [Math. Z. 18 (1923) und 21 (1924)] entwickelten Methode zur Auflösung von zwei Quaternionengleichungen mit zwei Unbekannten. [Study hatte diese Verallgemeinerung schon selbst Acta Math. 42 (1918) angegeben.] E. A. Weiss (Bonn).

**Carbonaro, Carmela:** Sulle algebre complesse dotate di modulo. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 3, 171—175 (1934).

Einige Systeme komplexer Zahlen, die schon von E. Study betrachtet worden sind [Mh. Math. Phys. 1, 283—355 (1890)], werden hier, als Anwendung der allgemeinen Theorie der Algebren, sehr einfach charakterisiert und wieder bestimmt; die Ergebnisse werden mit denjenigen von E. Study verglichen. E. G. Togliatti (Genova).

**Scholz, Arnold:** Berichtigung zu der Arbeit von Arnold Scholz: „Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. I.“, dieser Band S. 161—190. Math. Ann. 109, 764 (1934).

Verf. berichtigt den Beweis des folgenden Satzes (dies. Zbl. 8, 103): Damit sich ein Körper  $K_0 = K_{p_1}^l \cdot K_{p_2}^k$ , ( $l > 2$ ), zu einem Zweigkörper vom Typ  $(l, l; k)$  erweitern läßt, ist notwendig und hinreichend, daß  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitig  $l$ -te Potenzreste sind. Im Falle  $l = 2$ ,  $k > 1$  gilt dagegen: Für die Existenz eines Zweigkörpers vom Typ  $(2, 2; 2^k)$  ist notwendig und hinreichend, daß  $p_1$  und  $p_2$  gegenseitige biquadratische



Reste sind. Allgemein lautet das Kriterium für die Erweiterbarkeit eines Körpers  $K_0 = K_{p_1}^{l^{h_1}} \cdot K_{p_2}^{l^{h_2}}$  zu einem Zweigkörper vom Typ  $(l^{h_1}, l^{h_2}, l^k)$ :

$$r^{l^k-1} \neq \sigma^{(S_1-1)(S_2-1)} \sigma^{l^k},$$

für ein Ideal  $\mathfrak{r}$  der Grundidealklasse in  $K_0$  mit  $r = N(\mathfrak{r})$  und beliebige Zahlidealpotenzen  $\sigma, \sigma'$  von  $\mathfrak{r}$ .  
*Taussky (Wien).*

**Waerden, B. L. van der:** Elementarer Beweis eines zahlentheoretischen Existenztheorems. *J. reine angew. Math.* **171**, 1—3 (1934).

In der Klassenkörpertheorie [Cl. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **2**, 365—476 (1933); dies. Zbl. **8**, 53] und in der Theorie der Algebren (H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe [vgl. dies. Zbl. **6**, 152]) spielen Sätze über die Existenz von Kongruenzklasseneinteilungen der rationalen Zahlen mit vorgegebenen Eigenschaften eine Rolle. Der allgemeinste Satz, der für alle Zwecke hinreicht, ist folgender:  $a_1, \dots, a_r$  und  $k$  seien natürliche Zahlen. Es gibt eine zyklische Kongruenzklasseneinteilung der rationalen Zahlen (d. i. eine zyklische Faktorgruppe der multiplikativen Restklassengruppe nach einem passenden Modul  $m$ ), bei der die Exponenten von  $a_1, \dots, a_r$  durch  $k$  teilbar sind und außerdem  $-1$  den Exponenten 2 hat. Für den Fall  $r = 1$  ist dieser Satz schon von Chevalley (loc. cit.) elementar bewiesen worden, ein einfacherer Beweis bei Iyanaga, Sur un lemme d'arithmétique élémentaire dans la démonstration de la loi générale de réciprocité (vgl. dies. Zbl. **7**, 337). Durch eine auf Sylvester [On the divisors of the sum of a geometrical series. *Nature* **37**, 417 (1888), Coll. papers LV, 635] zurückgehende Betrachtung hat Hasse (Klassenkörpertheorie, Vorlesungsausarbeitung, Marburg 1933; dies. Zbl. **6**, 390) den Beweis für den Spezialfall noch weiter vereinfacht. Hier wird nun der Übergang vom Spezialfall  $r = 1$  zu beliebiger Anzahl  $r$  durchgeführt: Zunächst wird für  $k = l^v$  (Primzahlpotenz) für jedes einzelne  $a_i$  ein (Primzahl-)Modul  $p_i$  bestimmt, nach dem  $a_i$  den Exponent  $l^{v+\omega}$  hat, wo  $\omega$  eine hinreichend große natürliche Zahl ist.  $\chi_i(x)$  bedeute den Charakter modulo  $p_i$ , dessen Ordnung die in  $p_i - 1$  enthaltene Potenz von  $l$  ist. Ein Charakter  $\chi(x) = \prod_{i=1}^r \chi_i(x)^{c_i}$  erzeugt dann eine zyklische Kongruenzklasseneinteilung nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der  $p_i$  als Modul, deren Ordnung wieder eine Potenz von  $l$  ist. Es zeigt sich nun, daß, wenn die Hilfszahl  $\omega$  hinreichend groß gewählt wird, für die  $c_i$  so viel verschiedene Möglichkeiten bestehen, daß für mindestens ein  $\chi(x)$  alle Werte  $\chi(a_i)$  einen durch  $l^v$  teilbaren Exponenten haben. Damit ist der Satz für eine Primzahlpotenz  $k$  bewiesen (die Anforderung an den Exponenten von  $-1$  im Falle  $l = 2$  kann auch leicht erfüllt werden), und der Übergang zu beliebigem  $k = \prod_j l_j^{v_j}$  erfolgt durch Durchkreuzen von zyklischen Klasseneinteilungen, in denen die  $a_i$  jeweils durch  $l_j^{v_j}$  teilbare Exponenten haben. *Deuring.*

**Hlaváček, Mil.:** Contribution à résoudre de l'équation  $x^4 - y^4 = z^4 - u^4$  par les nombres entiers. *Čas. mat. fys.* **63**, R 73—R 75 u. R 101—R 102 (1934) [Tschechisch].

**Guttman, Solomon:** On cyclic numbers. *Amer. Math. Monthly* **41**, 159—166 (1934).

This paper applies some of the theory of the binomial congruence  $a^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  to give digital properties of the multiples of  $(a^n - 1)/p$  when written to the base  $a$ .

*D. H. Lehmer (Princeton).*

**Vandiver, H. S.:** On power characters in cyclotomic fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 111—117 (1934).

In this paper are given several different types of extensions of known results in the theory of power characters in cyclotomic fields, the proofs in the main being only indicated.

*R. D. Carmichael (Urbana).*



**Vandiver, H. S.:** Fermat's last theorem and the second factor in the cyclotomic class number. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 118—126 (1934).

As usual in the relation  $(1) x^l + y^l + z^l = 0$ , where  $l$  is an odd prime and  $x, y, z$  are rational integers prime to each other and non zero, the author refers to the case where  $xyz$  is prime to  $l$  as case I; case II is that in which  $xyz$  is divisible by  $l$ . In this paper he gives a sketch of the proof of a theorem which appears to him to be the principal result which he has so far found concerning the first case of the last theorem of Fermat. He enunciates the following two theorems. If (1) is possible in case I, then the second factor of the class number of the cyclotomic field defined by  $\zeta = e^{2\pi i/l}$  is divisible by  $l$ . If relation (1) is satisfied in case I, then, if  $\eta_j$  is a unit in  $k(\zeta)$ , we have  $\mathcal{C}_{h-j} = \eta_j^i$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ), and  $B_s \equiv 0 \pmod{l^2}$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ;  $s = n_i(l_1 + 1) - i$ ), where the  $n$ 's range independently over all positive integral values. Carmichael.

**Nicolescu, Miron:** Über die Fibonaccischen Reihenfolgen. Gaz. mat. **39**, 299—302 (1934) [Rumänisch].

L'a. généralise cette suite de Fibonacci,  $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ ,  $U_0 = 1$ ,  $U_1 = 1$ , aussi pour des indices  $n$  négatifs. Il trouve des relations entre les conditions de divisibilité des termes et leurs indices.

Abramescu (Cluj).

**Schröder, J.:** Eine spezielle extrapolatorische Darstellung der Möbiusschen Funktion. Mitt. math. Ges. Hamburg **7**, 240—246 (1934).

Verf. beweist mit elementaren Mitteln für die Möbiussche  $\mu$ -Funktion:

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) + \sum_{n \leq \frac{x+3}{6}} \mu(2n-1) \left( \left\lfloor \frac{x}{4(2n-1)} \right\rfloor + \sin^2 \frac{\pi}{2} \left\lfloor \frac{x}{2n-1} \right\rfloor \right) = 0.$$

Hierdurch gelingt es, die summatorische Funktion von  $\mu(n)$  im Intervall  $(1 \dots x)$  zu berechnen, wenn nur die Werte von  $\mu(n)$  im Intervall  $(1 \dots \frac{x+3}{6})$  bekannt sind.

Hans Heilbronn (Bristol).

**Orloff, Constantin:** Application du calcul spectral aux problèmes sur les polynomes. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr **1**, 63—65 (1933).

Verf. wendet die von M. Petrovitch in seiner Monographie: „Leçons sur les spectres mathématiques, professées à la Sorbonne en 1928“, Paris 1928, entwickelte Theorie der Spektren auf die Aufsuchung der rationalzahligen Faktoren von Polynomen an. Diese Methode besteht wesentlich in der Substitution von  $y = 10^H$  in ein gegebenes rationalzahliges Polynom  $F(y)$ , deren Koeffizienten durch eine lineare Transformation in ganze positive Zahlen transformiert wurden. [Tatsächlich muß eine stärkere Bedingung verlangt werden, daß auch die eventuellen Faktoren von  $F(y)$  positive Zahlen als Koeffizienten haben.] Die ganze positive Zahl  $H$  („rythme du spectre“) soll genügend groß gewählt werden, so daß jedenfalls  $10^H$  größer als jeder Koeffizient von  $F(y)$  und von seinen eventuellen Faktoren ist. — Dann werden die eventuellen Faktoren von  $F(y)$  eindeutig durch diejenigen Faktoren von  $F(10^H)$  bestimmt („facteurs spectraux“), die größer als  $10^H$  sind und deren Dezimalzahlentwicklung nur die  $h_1$  letzten Stellen jedes Abschnittes von je  $H$  Ziffern („tranche du spectre“) durch von Null verschiedene Ziffern besetzt sein können („cannelure du spectre“), wobei  $h_1$  eine speziell zu bestimmende Zahl ist. — Die Idee dieser Methode stimmt wesentlich mit der Kroneckerschen lexikographischen Methode überein, die hier „vollständig arithmetisiert“ ist. — Analog wird auch ein Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von mehreren Polynomen dargelegt. N. Tschebotaröw.

**Orloff, Constantin:** Évaluation des spectres mathématiques à l'aide des relations de récurrence. Bull. Acad. Sci. Math. et Nat., Belgrade Nr **1**, 91—96 (1933).

Ist eine Folge von ganzzahligen Polynomen  $X_1, X_2, \dots, X_s$  durch eine rekurrente Relation  $X_n = F_n(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$  definiert, wobei  $F_n$  ein (im allgemeinen von  $n$  abhängiges) Polynom vom Grade  $q_n$  in den  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  bedeutet, so zeigt der



Verf., wie man jedes  $X_n$  arithmetisch mit Hilfe der von M. Petrovitch entwickelten Spektralmethode bestimmen kann (M. Petrovitch, *Leçons sur les spectres mathématiques* professées à la Sorbonne en 1928, Paris 1928; vgl. auch das vorst. Ref.). — Dann wendet er diese Methode auf die Bestimmung der Koeffizienten von

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} z &= A_0 + \frac{A_1}{1!}z + \frac{A_2}{2!}z^2 + \dots, & \operatorname{cn} z &= B_0 + \frac{B_1}{1!}z + \frac{B_2}{2!}z^2 + \dots, \\ \operatorname{dn} z &= C_0 + \frac{C_1}{1!}z + \frac{C_2}{2!}z^2 + \dots \end{aligned}$$

an, die als Polynome des elliptischen Moduls  $k^2$  aufgefaßt sind und durch symbolische rekurrente Relationen

$$A_n = (B + C)^{n-1}, \quad B_n = -(A + C)^{n-1}, \quad C_n = -k^2(A + B)^{n-1}$$

definiert sein können.

N. Tschebotarow (Kasan).

**Romanoff, N. P.:** Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie. *Math. Ann.* **109**, 668—678 (1934).

Verf. beweist: Die Zahlen, die sich in der Form  $p + a^n$  ( $p$  Primzahl,  $n > 0$  ganz und fest,  $a > 1$  ganz und variabel) darstellen lassen, sind von positiver Dichte, d. h. es gibt ein  $\alpha = \alpha(n) > 0$ , so daß für große  $x$  mehr als  $\alpha x$  Zahlen in der obigen Form darstellbar sind. — Weiter zeigt Verf.: Wird  $a$  als fest und  $n$  als variabel betrachtet, so gilt der Satz auch, natürlich mit passendem  $\beta = \beta(a) > 0$  an Stelle von  $n$ . — Der letzte Satz ist besonders interessant, weil die Dichte der Primzahlen  $\frac{x}{\log x}$  und die Dichte der Potenzen von  $a$  nur  $\frac{\log x}{\log a}$  ist. — Der Beweis beruht auf folgender Überlegung. Es sei  $r(m)$  die Anzahl der Darstellungen von  $m$  in der gewünschten Form. Dann ist nach Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_{m=1}^x r(m) \right)^2 \leq \sum_{\substack{m=1 \\ r(m) > 0}}^x 1 \cdot \sum_{m=1}^x r^2(m).$$

Die links stehende Summe läßt sich leicht abschätzen.  $\sum_{m=1}^x r^2(m)$  nach oben abzuschätzen ist daher die eigentliche Aufgabe der Arbeit, die Verf. auf rein elementarem Wege bewältigt.

Hans Heilbronn (Bristol).

**Chowla, S.:** On the least prime in an arithmetical progression. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. **1**, 1—3 (1934).

Let  $k$  and  $l$  be integers prime to each other, and let  $P(k, l)$  be the least prime of the form  $kx + l$ . According to the author it is probable that  $P(k, l) < k^{1+\varepsilon}$  for every positive  $\varepsilon$  and all large  $k$ . This has not been proved, even on the assumption of the 'extended Riemann hypothesis', which only gives  $P(k, l) < k^{2+\varepsilon}$ . Here it is proved that  $P(k, l) < e^{A k}$ , and that  $P(k, l) < e^{A k^{\frac{3}{5}} \log^{\frac{3}{5}} k}$  for primes  $k \equiv 3 \pmod{4}$ . The proof is independent of the generalized prime-number theorem for primes in an arithmetic progression, which would give more precise results. *E. C. Titchmarsh.*

**Chowla, S.:** On the  $k$ -analogue of a result in the theory of the Riemann zeta function. *Math. Z.* **38**, 483—487 (1934).

Let  $\chi(n)$  be a real primitive character (mod  $k$ ). The author proves that

$$L_\chi(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \Omega_R(\log \log k),$$

and that

$$\sum_{n=1}^{k/4} \chi(n) = \Omega_R(\sqrt{k} \log \log k).$$

Weaker results of this type have been proved by Littlewood [*Proc. London Math. Soc.* (2) **27**, 358—372 (1928)] and Paley (see this *Zbl.* **3**, 341) respectively. To obtain



both these results, it suffices to prove that

$$r_3(m) = \Omega(\sqrt{m} \log \log m) \quad (1)$$

for quadratfrei integers  $m \equiv 1 \pmod{4}$ . ( $r_k(m)$  denotes the number of representations of  $m$  as the sum of  $k$  squares.) The author shows that if  $N$  is the product of the first  $r$  primes, then  $r_4(N) = \Omega(N \log \log N)$ , and so

$$\sum_{x \text{ odd}} r_3(N - x^2) = \Omega(N \log \log N).$$

He now proves that in this sum there are only  $O\left(\frac{\sqrt{N}}{\log N}\right)$  terms for which  $N - x^2$  is not quadratfrei, and that each such term is  $O(\sqrt{N} \log N)$ . From these facts (1) follows.

Davenport (Cambridge).

**Dixon, A. L., and W. L. Ferrar: Some summations over the lattice points of a circle.**

(I). Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 48—63 (1934).

Es sei  $r(n)$  die Anzahl der Zerlegungen von  $n$  in zwei Quadrate. Die Verff. gehen von der Formel

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} r(n) f(n) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} r(n) \int_0^{\infty} f(t) J_0(2\pi \sqrt{nt}) dt$$

aus; [(1) gilt z. B., wenn  $f(y)$ ,  $f'(y)$ ,  $f''(y)$  für  $y \geq 0$  beschränkt und für große  $y$  gleich  $O(\exp(-y^k))$  sind ( $k > 0$ )]. Aus (1) wird eine große Anzahl von Summationsformeln mit Besselschen Funktionen abgeleitet; zur Erläuterung möge folgendes Beispiel dienen. Ist  $b > 0$ ,  $\Re(\sqrt{a}) > 0$ , so folgt aus (1)

$$(2) \quad a^{\frac{1}{2}\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{(n+b)^{\frac{1}{2}\mu}} K_{\mu}(2\pi \sqrt{a(n+b)}) = b^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r(n)}{(n+a)^{\frac{1}{2}(1-\mu)}} K_{1-\mu}(2\pi \sqrt{b(n+a)}).$$

Setzt man hier  $\sqrt{a} = \alpha + i\sqrt{\lambda}$  ( $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ ) und ist  $\Re(\mu) > \frac{3}{2}$ , so bekommt man durch  $\alpha \rightarrow 0$  eine Formel — ich nenne sie (3) [sie entsteht aus (2), indem man einfach  $\sqrt{a}$  durch  $i\sqrt{\lambda}$  ersetzt]. Auf der rechten Seite von (2) macht der Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$  auch für  $\Re(\mu) \leq \frac{3}{2}$  keine Schwierigkeiten; dagegen braucht in diesem Falle die Reihe links in (3) nicht zu konvergieren. Aus diesem Grunde wird folgendes Summationsverfahren eingeführt: eine Reihe (4)  $\sum a_n K_{\mu}(i\beta \sqrt{n+b})$  ( $b \geq 0$ ) heiße  $AB$ -summierbar zur Summe  $l$ , wenn für  $\alpha \rightarrow 0$  gilt:  $\sum a_n K_{\mu}[(\alpha + i\beta) \sqrt{n+b}] \rightarrow l$ . Dann gilt (3) für jedes  $\mu$ , wenn unter der Reihe links ihre  $AB$ -Summe verstanden wird (eine Ausnahme kann jedoch eintreten, wenn  $r(\lambda) \neq 0$  ist; dann kann nämlich in (3) in der — sonst konvergenten — Reihe rechts ein sinnloses Glied auftreten). Es wird bewiesen: ist eine Reihe (4)  $(C, k)$ -summierbar, so ist sie auch  $AB$ -summierbar mit derselben Summe.

Jarník (Praha).

**Ricci, Giovanni: Un'osservazione su un classico teorema di Liouville relativo all'irrazionalità del numero  $e$ .** Boll. Un. Mat. Ital. 13, 89—92 (1934).

Der klassische Liouvillesche Beweis (1840), daß  $e$  und  $e^2$  nicht in einem quadratischen Zahlkörper liegen, wird verallgemeinert und so bewiesen: „Sind  $t \neq 0$ ,  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  ganze rationale Zahlen und nicht alle  $C_i = 0$ , so ist

$$C_0 + C_1 e^{\frac{2}{t}} + C_2 e^{\frac{4}{t}} + C_3 e^{\frac{3}{t}} \cos \frac{2}{t} + C_4 e^{\frac{2}{t}} \sin \frac{2}{t} \neq 0$$

und sogar

$$\gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{2}{t}} + \gamma_2 e^{-\frac{2}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{2i}{t}} + \gamma_4 e^{-\frac{2i}{t}} \neq 0,$$

wenn  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  ganze Zahlen des Gaußschen Körpers  $K(i)$  und nicht alle gleich Null

sind.“ — Beweis: Man setzt  $f_n(z) = \sum_0^n \frac{z^s}{s!}$ ,  $q_n(z) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{z^s}{s!}$ , also  $e^z = f_n(z) + q_n(z)$ ; dann

ist  $q_n(z) = O\left(\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\right)$  für  $n \rightarrow \infty$ , also

$$P_n = \gamma_1 q_n\left(\frac{2}{t}\right) + \gamma_2 q_n\left(-\frac{2}{t}\right) + \gamma_3 q_n\left(\frac{2i}{t}\right) + \gamma_4 q_n\left(\frac{-2i}{t}\right) = O\left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)! |t|^{n+1}}\right).$$



Andererseits ist für jedes  $n_0$  eine der Summen

$$F_n = \gamma_0 + \gamma_1 f_n \left( \frac{2}{t} \right) + \gamma_2 f_n \left( -\frac{2}{t} \right) + \gamma_3 f_n \left( \frac{2i}{t} \right) + \gamma_4 f_n \left( -\frac{2i}{t} \right) \quad (n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, n_0 + 4)$$

ungleich Null, und wenn speziell  $n_0 = 2^h$  mit  $h > 4$  ist, wird

$$M_n F_n \neq 0 \quad \left( M_n = \frac{t^n n!}{2^{n-5}} \right)$$

eine ganze rationale Zahl, also

$$|F_n| \geq \frac{2^{n-5}}{t^n n!}$$

und folglich für  $h \rightarrow \infty$

$$\left| \gamma_0 + \gamma_1 e^{\frac{2}{t}} + \gamma_2 e^{-\frac{2}{t}} + \gamma_3 e^{\frac{2i}{t}} + \gamma_4 e^{-\frac{2i}{t}} \right| \geq |F_n| - |P_n| \geq \frac{2^{n-5}}{t^n n!} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \neq 0,$$

w. z. b. w. Dieselbe Methode kann auf andere Spezialfälle des Lindemannschen Satzes angewandt werden. Mahler (Manchester).

## Gruppentheorie.

**Miller, G. A.:** Groups whose squares constitute cyclic subgroups. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 203—206 (1934).

Es werden die Gruppen  $G$  der Ordnung  $g$  untersucht, in denen das Quadrat eines jeden Elementes einer festen zyklischen Untergruppe  $H$  der Ordnung  $h$  angehört. Es gilt  $g = 2^\alpha h$ . Ist  $G$  nicht direktes Produkt einer Gruppe  $G'$  und einer abelschen Gruppe der Ordnung  $2^n$  vom Typ  $(1, 1, \dots, 1)$ , so lassen sich die nicht isomorphen Gruppen  $G$  für ungerades  $h$  und für  $h = 2^m$  vollständig aufzählen. An dem Beispiel der Gruppen der Ordnung 64 wird gezeigt, daß die dabei gewonnenen Resultate für die Aufzählung aller Gruppen einer gegebenen Ordnung von Nutzen sein können.

Magnus (Frankfurt a. M.).

**Miller, G. A.:** Groups involving three and only three squares. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 243—246 (1934).

**Miller, G. A.:** Groups whose Sylow sub-groups of order  $p^m$  contain no more than  $p^{m+2}$  operators whose orders are powers of  $p$ . Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 23 bis 29 (1934).

$H$  sei Sylowgruppe der Ordnung  $p^m$  in einer Gruppe  $G$ . Es werden Kriterien dafür angegeben, wann  $G$  mehr als  $p^{m+2}$  Elemente haben muß, deren Ordnung eine Potenz  $p^v$  von  $p$  ist. Z. B. tritt das ein, wenn  $H$  mit keiner seiner Konjugierten einen Durchschnitt von einer Ordnung  $> p^{m-2}$  besitzt. Ferner wird der Fall untersucht, daß  $G$  nicht mehr als  $p^{m+2}$  Elemente der Ordnung  $p^v$  enthält; insbesondere wird gezeigt, daß  $H$  mit allen seinen Konjugierten einen gemeinsamen Durchschnitt vom Index  $p$  in  $H$  haben muß, wenn die Anzahl dieser Elemente  $< p^{m+2}$  sein soll. — Haben irgend zwei konjugierte Sylowgruppen von  $G$  einen Durchschnitt, der in beiden Sylowgruppen eine Primzahl als Index besitzt, so ist  $G$  auflösbar.

Magnus (Frankfurt a. M.).

**Kurosch, Alexander:** Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen. Math. Ann. **109**, 647—660 (1934).

Sind  $H_\alpha$  (für eine beliebige Indexmenge  $\{\alpha\}$ ) irgendwelche Gruppen, so gibt es genau eine Gruppe  $G$ , deren Elemente  $\neq 1$  sich auf genau eine Weise in der Form  $h_{\alpha_1} h_{\alpha_2} \dots h_{\alpha_n}$  darstellen lassen, wobei die  $\alpha_i$  Zahlen der Menge  $\{\alpha\}$  sind,  $h_{\alpha_i}$  ein Element  $\neq 1$  aus  $H_{\alpha_i}$  und  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) ist.  $G$  heißt freies Produkt aus den Komponenten  $H_\alpha$ . Für diese von Artin und Schreier eingeführte Gruppenkomposition beweist Verf. die grundlegenden Sätze: 1. Jede Untergruppe von  $G$  ist freies Produkt von unendlichen zyklischen Gruppen und von Gruppen, die mit Untergruppen der  $H_\alpha$  konjugiert sind. 2. Ist  $G$  auf zwei Arten als freies Produkt von nicht weiter in freie Produkte zerlegbaren Komponenten darstellbar, so lassen sich die Komponenten der beiden Darstellungen einander umkehrbar eindeutig so zuordnen, daß entsprechende Gruppen isomorph sind. Wenn sie nicht unendliche zyklische Gruppen sind, sind sie in  $G$  konjugiert. — Der Satz von Schreier, daß die Untergruppen von



freien Gruppen frei sind, sowie ein Teil der Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verf. [Math. Ann. 108, 26—36 (1933); dies. Zbl. 6, 149 (1933)] sind hierin als Spezialfälle enthalten.

Magnus (Frankfurt a. M.).

**Baer, Reinhold: Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen.** Math. Z. 38, 375—416 (1934).

Unter einer Erweiterung einer Gruppe  $\mathfrak{N}$  durch eine Gruppe  $G$  wird nach O. Schreier eine Gruppe  $\mathfrak{G}$  verstanden, welche  $\mathfrak{N}$  als Normalteiler enthält, während  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  isomorph zu  $G$  ist. Verschiedene Erweiterungen von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$  werden zum gleichen Erweiterungstyp gerechnet, wenn sie durch  $\mathfrak{N}$  und  $G$  elementweise invariant lassende Isomorphismen aufeinander beziehbar sind. Jedem Erweiterungstyp von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$  entspricht eine multiplikative Funktion  $\chi(g)$ , wobei  $\chi(g)$  diejenige Automorphismenklasse ist, welche die  $g$  entsprechende Restklasse der nach  $\mathfrak{N}$  zerlegten Erweiterung in  $\mathfrak{N}$  induziert. Gibt man umgekehrt eine Funktion  $\chi(g)$  vor, welche den Elementen von  $G$  eindeutig und homomorph Automorphismenklassen von  $\mathfrak{N}$  zuordnet, so ist es bei nicht kommutativem  $\mathfrak{N}$  nicht immer möglich, jedes  $\chi(g)$  durch einen Erweiterungstyp von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$  zu realisieren. Das wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt. Und wenn  $\chi(g)$  realisiert werden kann, so entsprechen ihm mitunter mehrere verschiedene Erweiterungstypen von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$ . Nur der Erweiterungstyp von  $\mathfrak{N}/\mathfrak{Z}$  ( $\mathfrak{Z}$  das Zentrum von  $\mathfrak{N}$ ) durch  $G$  und die von seinen Elementen zu induzierenden Automorphismen liegen eindeutig fest. Besteht  $\mathfrak{Z}$  insbesondere aus der Gruppeneins, so gibt es zu jedem  $\chi(g)$  genau einen Erweiterungstyp. Verf. behandelt eine geometrische Anwendung dieses Satzes auf Fundamentalgruppen von geschlossenen, orientierbaren Flächen vom Geschlechte  $\geq 2$ , da deren Zentrum nur aus der Identität besteht. — Der Fall, daß  $\mathfrak{N}$  eine kommutative Gruppe ist, muß für sich behandelt werden. In diesem Falle ist jedes  $\chi(g)$  realisierbar.  $G$  wird durch Erzeugende und Relationen gegeben angenommen und jeder Erzeugenden  $e_i$  von  $G$  ein Element  $e_i$  aus der  $e_i$  entsprechenden Restklasse von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  zugeordnet, wobei festgesetzt wird, daß der dem Einheitslement von  $G$  entsprechenden Restklasse, nämlich  $\mathfrak{N}$ , das Element 1 entspricht. Die Funktion  $w(\prod e_{v_i}) = \prod e_{v_i}$  ist dann multiplikativ. Ist  $r$  ein Element aus dem System  $R$  aller Relationen, so ist  $w(r) = \alpha(r)$  ein Element von  $\mathfrak{N}$ .  $\alpha(r)$  wird multiplikative Relationsfunktion genannt, ihr Wertevorrat ist eine gewisse Halbgruppe in  $\mathfrak{N}$ . Jedem Erweiterungstyp von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$ , welcher ein gegebenes  $\chi(g)$  realisiert, wird so eine Relationsfunktion  $\alpha(r)$  zugeordnet. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angegeben, die eine Funktion  $\alpha(r)$  erfüllen muß, damit sie die Relationsfunktion einer  $\chi(g)$  realisierenden Erweiterung von  $\mathfrak{N}$  durch  $G$  sei. Durch  $\alpha(r)$  ist der Erweiterungstyp dann eindeutig bestimmt. Als Spezialfall dieser Charakterisierung ergibt sich die Charakterisierung durch Faktorensysteme. Verschiedene Erweiterungen gehören dann und nur dann zum gleichen Typ, wenn die entsprechenden Faktorensysteme assoziiert sind. Die Menge aller Erweiterungstypen einer abelschen Gruppe bilden selbst eine abelsche Gruppe  $T$ , welche ähnlich wie die R. Brauer-E. Noethersche Gruppe hyperkomplexer Systeme gebildet ist. Hätte man von vornherein 2 Erweiterungen zum gleichen Typ gerechnet, wenn sie nur durch Isomorphismen aufeinander bezogen werden können, welche  $\mathfrak{N}$  und  $G$  festlassen, ohne daß diese elementweise festbleiben müssen, so bilden die Erweiterungstypen im allgemeinen keine Gruppe. Ist  $G$  eine freie Gruppe, so besteht  $T$  nur aus der 1. Weiter werden die Erweiterungen abelscher Gruppen durch zyklische Gruppen und durch direkte Produkte behandelt und es werden diejenigen Erweiterungen untersucht, welche selbst abelsch sind. Gleichzeitig wird das Problem behandelt, wann ein vorgegebenes direktes Produkt von endlich vielen zyklischen Gruppen  $G = Z_1 \times Z_2 \times \dots \times Z_n$  Faktorgruppe nach dem Zentrum einer Gruppe sein kann. Sind  $Z_1, \dots, Z_u$  unendliche Zykeln und sind die Ordnungen von  $Z_{u+1}, \dots, Z_n$  so gegeben, daß die Ordnung von  $Z_{i-1}$  Vielfaches der von  $Z_i$  ist, so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung, daß entweder  $u \geq 2$  oder  $u = 0$  und  $n \geq 2$ ,  $n_1 = n_2$  ist. Insbesondere kann die Faktorgruppe nach dem Zentrum also nicht zy-



klisch sein. — Die Funktion  $\chi(g)$  hat bei abelschem  $\mathfrak{N}$  die Eigenschaft, jedem Element  $g$  aus  $G$  eindeutig und homomorph einen Automorphismus von  $\mathfrak{N}$  selbst zuzuordnen. Eine solche Funktion wird ein Charakter genannt. Im allgemeinen ist das Produkt zweier Charaktere nicht wieder ein Charakter. Es wird gezeigt, daß die Menge der Charaktere eine Schar und mitunter sogar eine (kommutative) Gruppe bilden kann.

Taussky (Wien).

## Analysis.

### Reihen:

**Ales, Maria:** Sulle serie del tipo  $\sum \frac{n^r}{n!} x^n$ . Rend. Circ. mat. Palermo 58, 151—152 (1934).

**Izumi, Shin-ichi:** Infinite series with multiply monotone terms. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 127—131 (1934).

Une suite  $\{a_n\}$ , où  $a_n \geq 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$ , est dite d'après K. Knopp [Math. Z. 22, 75—85 (1925)]  $r$ -fois ( $r$ -fach) monotône ( $r \geq 0$  quelconque), si la série

$$\Delta^{(r)} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-r-1}{k} a_{n+k}$$

converge, quel que soit  $n = 0, 1, \dots$ , et si  $\Delta^{(r)} a_n \geq 0$  pour  $n = 0, 1, \dots$ . — L'auteur généralise quelques propriétés connues des séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , où la suite  $\{a_n\}$  est monotône et tend vers zéro [A. Ostrowski, Jb. Deutsch. Math.-Vereinig. 34, 161—166 (1926)], aux séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ , où la suite  $\{a_n\}$  est  $r$ -fois monotône. F. Leja (Warszawa).

**Ito, Diro, and Shin-ichi Izumi:** On multiply monotone sequences. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 132—136 (1934).

Quelques propriétés des suites  $r$ -fois monotônes [K. Knopp, Math. Z. 22, 75—85 (1925)]. Voir le travail précédent de S. Izumi. F. Leja (Warszawa).

**Izumi, Shin-ichi:** A new proof of the Andersen's theorem. Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 140—142 (1934).

Beweis eines bekannten Satzes über die Summationsmethode von Cesàro [Ist eine Reihe  $(C, \varrho)$  beschränkt und  $(C, \sigma)$  summierbar, wo  $\sigma > \varrho > -1$ , so ist sie  $(C, \tau)$  summierbar für alle  $\tau > \varrho$ ]. F. Leja (Warszawa).

**Fejér, Lipót:** Über einige neue Eigenschaften der arithmetischen Mittel der Fourierreihe und der Potenzreihe. Mat. fiz. Lap. 41, 1—16 (1934) [Ungarisch].

**Fejér, Leopold:** On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 1—17 (1934).

Verf. unternimmt, den „glättenden Effekt“ der arithmetischen Mittel der Teilsummen (a. M.) bei Fourierschen und Potenzreihen an einigen besonders anschaulichen Theoremen zu erläutern. Für die Fouriersche Sinusreihe einer im Intervalle  $0 < x < \pi$  positiven und von oben konvexen Funktion  $f(x)$  gilt: Die a. M. sind im Intervalle  $0 < x < \pi$  von der 0. Ordnung ab positiv, von der 1. Ordnung ab unterhalb der Funktion gelegen, von der 3. Ordnung ab konvex. Der Beweis beruht auf älteren Ergebnissen des Verf. sowie auf einem Satz von Koschmieder. Im symmetrischen Falle  $f(\pi - x) = f(x)$  gilt die Konvexität sogar für die a. M. von der 2. Ordnung ab. Weiter wird ein Satz von Alexander über die Schlichtheit der Polynome

$$\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$

für  $|z| \leq 1$  sehr einfach bewiesen. Die gleiche Methode liefert dann folgende interessante Ergänzung zu einem Satz des Ref. über die Schlichtheitsradien der Abschnitte schlichter Potenzreihen. Es sei das Bild des Einheitskreises bei einer reellen schlichten Abbildung so beschaffen, daß jede vertikale Gerade, welche das Bild trifft, eine ganze



Strecke mit ihm gemein hat. Dann sind die a. M. 3. Ordnung im ganzen Kreise  $|z| \leq 1$  schlicht. Im Falle einer derartigen Abbildung, die außerdem noch ungerade ist, gilt dies schon für die a. M. 2. Ordnung, während die Abschnitte selbst im Kreise  $|z| \leq 3^{-\frac{1}{2}}$  schlicht bleiben. Diese letzte Schranke kann nicht vergrößert werden. — Die englische Fassung stellt eine wortgetreue Wiedergabe der ungarischen Arbeit dar. *Szegő.*

**Ghermanesco, M.: Sur l'intégrale de Poisson.** Bull. sci. École polytechn. Timișoara 4, 159—184 (1932); 5, 41—74 (1934).

The author investigates a number of methods of summing Fourier series related to or suggested by the Poisson integral. — Ch. I. Recurrent sequences with application to Gegenbauer polynomials. — Ch. II. The well-known expressions of Poisson's integral in terms of Fourier or Fejér sums. On p. 175 occurs a modernized version of the famous error of Poisson. The author claims that the Fourier series of a continuous function is absolutely summable by Borel's exponential method. This is known to be false; what he actually proves is that the convergent Fourier-Poisson series is summable Borel for every  $r, 0 < r < 1$ , which is trivial. — Ch. III. A study of the trigonometric polynomials

$$P_{p,n}(x, r) = \frac{1}{\pi A_p} \int_a^b [\Phi_n(t)]^p f(x + 2t) dt, \quad 0 \leq a < b \leq \pi,$$

where

$$\Phi_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k \frac{\sin(2k-1)t}{\sin t}, \quad \pi A_p = \int_0^\pi [\Phi_n(t)]^p dt,$$

and  $p$  is an integer  $\geq 1$ . — Ch. IV. Convergence of  $P_{p,n}(x, r)$  to  $f(x)$  for  $r > 1$  as  $n \rightarrow \infty$ . Degree of approximation. Absence of Gibbs' phenomenon. — Ch. V. A generalization of Poisson's integral obtained by letting  $n \rightarrow \infty$  in  $P_{p,n}(x, r)$  and taking  $a = 0, b = \pi, r < 1$ . The author also considers the singular integral obtained by differentiating the Poisson integral  $p$  times with respect to  $r$  and attaching the correct multiplier. — Ch. VI. Recurrent trigonometric polynomials; means of Fourier series, the weights forming a recurrent sequence. *E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Bosanquet, L. S.: The absolute summability (A) of Fourier series.** Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 12—17 (1934).

This paper is concerned with generalizations of certain theorems of Whittaker and Prasad on the absolute summability (A) of Fourier series. Let  $f(t)$  be integrable in the sense of Lebesgue over  $(-\pi, \pi)$  and periodic with period  $2\pi$ . For a fixed  $\theta$  and  $s$ , let

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2} \{f(\theta+t) + f(\theta-t) - 2s\} \text{ and } \varphi_\alpha(t) = (\alpha/t) \int_0^t (1-u/t)^{\alpha-1} \varphi_0(u) du \text{ for } 0 < \alpha.$$

The author proves that the Fourier series of  $f(t)$  is absolutely summable (A) at  $t = \theta$ , to sum  $s$ , if (a), for some  $0 \leq \alpha$  and  $0 < \eta$ ,  $\varphi_\alpha(t)$  is of bounded variation on  $(0, \eta)$  and  $\varphi_\alpha(t) \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow 0$ . He shows further that (a) is satisfied if (b), for some  $0 \leq \alpha$

and  $0 < \eta$ , the integral  $\int_0^\eta |\varphi_\alpha(t)| t^{-1} dt$  is finite. Condition (b), for  $\alpha = 0$ , reduces to

that given by Whittaker [Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 2, 1—5 (1931)]. Condition (b), for  $\alpha = 1$ , and condition (a), for  $\alpha = 0$  reduce to some given by Prasad (see this Zbl. 1, 59, and 7, 160).

*Gergen* (Rochester).

**Ganapathy Iyer, V.: Rearrangement of complex series.** J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 8—22 (1934).

Es handelt sich um den folgenden Satz: Gegeben sei eine Folge  $\{a_n\}$  von komplexen Zahlen mit  $M = \limsup |a_n|$ . Vorausgesetzt wird, daß die  $\sum a_n$  in „keiner Richtung unbedingt“ konvergiert oder divergiert. Dann kann man zu jeder komplexen Zahl  $\sigma$  eine Umordnung der Reihe  $\sum a_n$  angeben, so daß alle Häufungswerte der umgeordneten Reihe der abgeschlossenen Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt  $\sigma$  und dem Radius  $10M$  angehören. — Für  $M = 0$  ist dies der bekannte Steinitzsche Umord-



nungssatz für Reihen. Der vom Verf. gegebene Beweis ist im wesentlichen mit dem Steinitzschens identisch. Nur wird der Beweis, da sich Verf. auf komplexe Zahlen beschränkt (bei Steinitz sind die Reihenglieder  $m$ -dimensionale Vektoren), an einer Stelle etwas einfacher. Im übrigen ist auch die oben gegebene Fassung für allgemeines  $M$  aus der Steinitzschens Beweisführung unmittelbar zu ersehen. *Rogosinski.*

**Steinhaus, H.: Sur les suites complètes.** *Studia Math.* **4**, 142—145 (1933).

Mit Hilfe einer von O. Szász für ähnliche Probleme (vgl. Jb. Fortschr. Math. **56** I, 235) verwandten Methode wird folgender Satz bewiesen: Die Funktion  $F(x)$  sei regulär in einem Bereich, der die Strecke  $\langle 0, R \rangle$  der positiv-reellen Achse enthält;  $F(x)$  sei reell für reelles  $x$ ; in der Entwicklung  $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  sei  $a_{n_j} \neq 0$ ,

wobei  $\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$  divergiere;  $\{t_v\}$  sei eine Folge positiver Zahlen, darunter unendlich viele

untereinander verschieden, sei  $\lim t_v = t_{\infty}$  und  $a$  eine den Ungleichungen  $0 \leq a \cdot t_{\infty} \leq R$  genügende Zahl. Dann ist das Funktionensystem  $\varphi_v(x) = F(t_v x)$ ,  $v = 1, 2, 3, \dots$ , vollständig für das Intervall  $0 \leq x \leq a$  und mit Hinzufügung der Zahl 1 eine Basis der stetigen Funktionen in  $\langle 0, a \rangle$ . *Otto Szász (Cambridge, Mass.).*

**Soula, J.: Sur une suite de nombres qui correspond à une fonction sommable.** *J. Math. pures appl.*, IX. s. **13**, 93—112 (1934).

Given a real function  $f(t)$  summable in an interval  $(0, a)$  the numbers

$$c_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^a t^{n-1} f(a-t) dt$$

are called integral coefficients of  $f(t)$ . They may be also defined by induction as follows:

$f_0(t) = f(t)$ ,  $f_{n+1}(t) = \int_0^t f_n(x) dx$ ,  $c_n = f_n(a)$ . The investigation of the properties of these coefficients is attached to that of the complex function  $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! c_{n+1} z^{-n-1}$ .

From the theorems established by the author we shall mention the following: 1. In order that  $c_n$  should be integral coefficients of a bounded function in  $(0, a)$  it is necessary and sufficient that the function  $\Phi(z)$  as defined above should be holomorphic and bounded on the whole plane with the exception at most of the real segment  $0 \leq x \leq a$ . 2. In order that the function  $f(t)$  should identically vanish in  $(0, a)$  it is necessary and sufficient that there should exist a sequence  $\{n_k\}$  such that  $\sum_k 1/n_k$  diverges and  $c_{n_k} = 0$  for all  $k$ . This

“unicity theorem” is proved in a very simple and elegant way by applying the Blaschke theorem concerning the zeros of a bounded analytic function. It might be, however, also related to some general results which had been discussed by Müntz (Schwarz-Festschrift. Berlin 1914. S. 303—312) and Szász [*Math. Ann.* **77**, 482—496 (1915); see also Steinhaus, *Studia Math.* **4**, 142—145 (1933); see the prec. rev.]. 3. There is  $\limsup_n n \sqrt[n]{|c_n|} = ae$  unless the corresponding function  $f(t)$  vanishes in a neighbourhood  $(0, \varepsilon)$  of  $t = 0$ ; in that case  $\limsup_n n \sqrt[n]{|c_n|} < ae$ . In connection with these results there are also established the following theorems: 4. If  $\varphi(t)$  is a summable function in  $(0, a)$  and  $\Phi(z) = X - iY = \int_0^a \frac{\varphi(t) dt}{z-t}$  then, for almost all values  $x$  ( $0 < x < 1$ ),  $Y(x, y)$  tends to  $\frac{\pi}{2} \varphi(t)$  and  $X(x, y)/\log \frac{1}{y}$  to zero as  $y \rightarrow 0$ . If, moreover,  $\varphi(t)$  is bounded then  $Y$  and  $X/\log \frac{1}{y}$  are also bounded in a neighbourhood of the segment  $(0, a)$ . 5. In order that a function  $\Phi(z)$  holomorphic in the whole plane with the exception at most of the real



segment  $(0, a)$  should have its imaginary part bounded it is necessary and sufficient that it should be of the form  $\int_0^a \frac{\varphi(t) dt}{z-t} + \text{const}$  where  $\varphi(t)$  denotes a bounded real function in  $(0, a)$ . These two theorems proved directly although in a somewhat complicated form, stand in an obvious relation to some well-known boundary values theorems of Plessner, Privaloff and Riesz. It may be also remarked that under the assumptions of the first part of Theorem 4 the expression  $X(x, y)/\log \frac{1}{y}$  not merely tends to zero as  $y \rightarrow 0$  but the finite limit  $\lim_{y \rightarrow 0} X(x, y)$  exists for almost all  $x$ . Finally, Theorem 5 seems to lack an additional assumption *e. g.* that  $\Im \Phi(z)$  is an impair function or, more generally, that  $\lim_{y \rightarrow 0} [\Im \Phi(x, y) + \Im \Phi(x, -y)] = 0$  for almost all  $x$ . — The second part of the paper is concerned with the integral equation of the first kind  $f(x) = \int_0^a K(x, s) h(s) ds$ . In terms of the integral coefficients  $c_n$  and  $D_n(s)$  of the functions  $f(x)$  and  $K(x, s)$  respectively a condition is given for the existence of a solution  $h(s)$  with summable square.

Saks (Warszawa).

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

**Bohr, H., and B. Jessen:** Mean-value theorems for the Riemann zeta-function. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 43—47 (1934).

The authors consider mean values of the form

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Phi\{\zeta(\sigma + it)\} dt = M_\Phi(\sigma), \quad (\sigma > \tfrac{1}{2})$$

where  $\Phi(z)$  is any function satisfying certain general conditions. The existence of such mean values is well known if  $\Phi(z) = |z|^k$ , and  $k$  has certain values. The existence of the limit for more general functions  $\Phi$  is here deduced from a theorem of the authors on the distribution of the values of  $\zeta(s)$  — see this Zbl. 3, 389. Interesting special cases are  $\Phi(z) = |z|^{2k}$  where  $k$  is not an integer,  $\Phi(z) = |z - a|^{2k}$ ,  $\log |z|$ , and  $\log |z - a|$ .

E. C. Titchmarsh (Oxford).

**Leja, F.:** Sur une propriété des séries de Dirichlet doubles. C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 4—11 (1933).

Verf. untersucht die Verhältnisse zwischen der Konvergenz einer doppelten Dirichletschen Reihe und der Konvergenz ihrer Zeilen und zeigt, daß ein Satz von Hartsogs [Dissertation, München (1904) S. 22] und ein Satz vom Verf. [C. R. Acad. Sci., Paris 185, 1103 (1927)], die ursprünglich für doppelte Potenzreihen bewiesen waren, sich mutatis mutandis auf das Gebiet der doppelten Dirichletschen Reihen übertragen lassen.

Vlad. Bernstein (Milano).

**Bochner, S., and F. Bohnenblust:** Analytic functions with almost periodic coefficients. Ann. of Math., II. s. 35, 152—161 (1934).

Diskussion der analytischen Funktionen

$$G_1(s) = \sum_0^\infty f(n) z^n \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

wobei  $f(t) \sim \sum_p a_p e^{i\lambda_p t}$  fastperiodisch ist. Man erhält formal

$$G_1(s) = \sum_p a_p \frac{1}{1 - z e^{i\lambda_p}} \quad \text{bzw.} \quad \sum_p a_p \frac{1}{s - i\lambda_p},$$

und es wird gezeigt, daß sich  $G_1(s)$  genau so benimmt, wie es nach diesen Ausdrücken zu vermuten ist. Am einfachsten ist der zweite Fall:  $G_1(s)$  ist regulär für  $\sigma > 0$  und die Punkte  $s = i\lambda_p$  und ihre Häufungspunkte sind Singularitäten von  $G_1(s)$ ; gibt es Inter-

valle  $\sigma = 0$ ,  $A_1 < \tau < A_2$ , welche von Punkten  $i\lambda_p$  frei sind, dann ist  $G_1(s)$  durch diese Lücken über  $\sigma < 0$  fortsetzbar, und die Fortsetzung ist dieselbe durch verschiedene Lücken. Im ersten Fall gilt ähnliches, falls  $f(t)$  zwischen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen linear verläuft. Die Fortsetzung von  $G_1(s)$  ist

$$G_3(s) = - \sum_1^{\infty} f(-n) z^{-n} \quad \text{bzw.} \quad - \int_0^{\infty} e^{st} f(-t) dt.$$

Es werden auch Funktionen  $G_1(s) = \sum_1^{\infty} f(\log n) n^{-s}$  betrachtet; man erhält hier formal  $G_1(s) = \sum_p a_p \zeta(s - i\lambda_p)$ . B. Jessen (Princeton, N. J.).

**Riesz, M.: Eine Bemerkung über den Eindeutigkeitssatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen.** Mat. Tidsskr. B H. 1, 11—13 (1934).

Wesentliche Abkürzung des letzten Teils des Beweises von de la Vallée-Poussin für den im Titel genannten Satz. Die Darstellung knüpft direkt an die Darstellung in Bohr: Fastperiodische Funktionen (Erg. Math. 1, H. 5) an und ersetzt  $1\frac{1}{2}$  Seiten durch  $\frac{1}{2}$  Seite. B. Jessen (Princeton, N. J.).

### Differentialgleichungen:

**Lyn, G. van der: Recherches sur l'existence des intégrales approximatives supérieure et inférieure de l'équation différentielle  $y' = f(x, y)$ .** Mathesis 48, 79—84 (1934).

Une fonction  $\varphi(x)$  est intégrale approximative dans  $(x_0, x_1)$  d'une fonction mesurable  $f(x, y)$ , finie et déterminée dans un rectangle  $R(\alpha \leq x \leq \beta; \gamma \leq y \leq \delta)$ , si elle est pour  $\varepsilon = 0$  intégrale à  $\varepsilon$  près de  $f(x, y)$  dans cet intervalle [cf. van der Lyn, C. R. Acad. Sci, Paris 197, 512—514 (1933); ce Zbl. 7, 242]. En supposant  $f(x, y)$  bornée (avec les bornes  $m, M$ ), approximativement continue p. r. à  $x$  et  $y$  et continue p. r. à  $y$  en chaque point de  $R$ , l'auteur établit pour  $\alpha \leq x_0 < \beta$  et  $\gamma \leq y_0 < \delta$  dans chaque intervalle finie  $(x_0, X)$ , dont la longueur reste au delà d'une borne fixe, l'existence d'intégrales approximatives de l'équation  $y' = f(x, y)$ , se réduisant à  $y_0$  pour  $x = x_0$  et avec les quatre nombres dérivés bornés par  $m$  et  $M$ . En outre il démontre parmi ces intégrales l'existence d'une intégrale qui n'est surpassée par aucune autre (l'intégrale approximative supérieure dans  $(x_0, X)$ ). J. Ridder (Groningen).

**Hukuhara, Masuo: Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires; domaine réel.** J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 2, 13—88 (1934).

Dans le chap. I l'aut. démontre l'existence d'une solution du système d'équations différentielles

$$\frac{dx_p}{dt} = f_p(t, x), \quad p = 1, 2, \dots, n$$

satisfaisant aux conditions initiales:  $x_p(t_p) = x_p^0$ ; les  $f_p$  sont supposées continues par rapport aux  $x_p$  et mesurables par rapport à  $t$  avec  $|f_p(t, x)| < F_p(t)$ ,  $F_p$  sommable;

on suppose de plus que les fonctions transformées  $\bar{x}_p = x_p^0 + \int_{t_p}^t f(t, x) dt$  vérifient les inégalités  $|\bar{x}_p - \varphi_p(t)| \leq \sigma \omega_p(t)$ ,  $\sigma \leq 1$ ,  $\omega(t) > 0$ , si on a:  $|x_p - \varphi_p| \leq \omega_p(t)$ ; pour  $\sigma < 1$  on a l'unicité. La méthode est basée sur l'existence d'un point invariant des transformations de l'espace fonctionnel. Le chap. II contient l'étude du système linéaire de la forme

$$(A) \quad \frac{dz_p}{dt} = \sum_{j=1}^n c_{pj}(t) e^{(\mu_j - \mu_p)t} z_j, \quad p = 1, 2, \dots, n; \text{ les } \mu_p \text{ réels.}$$

En posant  $\mu$  égal à un (on a plusieurs) des nombres  $\mu_p$  et en désignant  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |c_{pj}(t)| = \mu'_p$ ,  $\mu' = \max_{\mu_p = \mu} \mu'_p$ , si on a:  $\mu'_p < |\mu - \mu_p| - \mu'$  ( $\mu_p \neq \mu$ ), on obtient le système unique d'intégrales  $z_p(t)$  prenant les valeurs assignées  $z_p^0$  pour  $t = h$  (suffisamment grand) si  $\mu_p < \mu$ ;  $z_p(\tau) = z_p^0$ ,  $\tau \geq h$  pour  $\mu_p = \mu$ ;  $z_p(t)$  s'annulant à l'infini pour  $\mu_p > \mu$ . Pour cette solution on obtient les inégalités:  $(\mu - \mu')t - o(t) \leq \log M_1(t) \leq (\mu + \mu')t + o(t)$ ,





**Sokolnikoff, I. S., and E. S. Sokolnikoff:** Note on a resolution of linear differential systems. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 36—40 (1934).

The problem of resolving a linear differential system, consisting of an ordinary differential equation together with two-point boundary conditions, into two or more such systems of lower order, was investigated by J. M. Whittaker (this Zbl. 4, 61). In the present paper the authors give, in matrix form, necessary and sufficient conditions that such a resolution should be possible. *Whittaker* (Edinburgh).

**Haag, J.:** Sur certains problèmes de la théorie des fonctions harmoniques. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1336—1339 (1934).

The following problem is typical. Given a closed contour  $\Gamma$  not intersecting the  $y$ -axis and a function  $F$  continuous on  $\Gamma$ , determine a harmonic function  $P$  continuous inside of  $\Gamma$  which satisfies the relation  $x \frac{\partial P}{\partial x} + tP = F$  on  $\Gamma$  where  $t$  is a given constant.

Assuming that Dirichlet's problem for the contour can be solved by a potential of a double distribution, the author indicates how to solve his problem. The other problems, which involve the determination of a pair of conjugate harmonic functions satisfying two or three boundary conditions, have not yielded general solutions so far.

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Turner, Alice Willard:** The convergence of the poisson integral at a point of approximate continuity. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 27, 27—35 (1933).

Let  $f(\theta)$  be bounded and measurable in  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  and continuous on a set  $E$  having density 1 at the point  $\theta = 0$ . Let  $\frac{mE \text{ in } (-\eta, \eta)}{2\eta} \geq 1 - L(\eta)$ , where  $L(\eta)$  is a positive decreasing function of  $\eta$  tending to zero with  $\eta$ . Then, the author proves, the Poisson integral in the unit circle formed for  $f(\theta)$  approaches  $f(0)$  along any curve  $r = r(\varphi)$ , interior to the unit circle and terminating in  $\theta = 0$ , for which  $\varphi L(2\varphi) = o(1 - r(\varphi))$ . For analogous results concerning bounded analytic functions cf. also J. L. Doob (this Zbl. 3, 404). The above result is extended to the case when  $f(\theta)$  is unbounded at  $\theta = 0$ , but  $|f(\theta)| \leq M(\theta)$  and  $M(\theta) \rightarrow \infty$  as  $\theta \rightarrow 0$ , where  $M(\theta)^{1+\varepsilon}$  is summable for some  $\varepsilon > 0$ . An application of the result is made to establish the following extension of Lebesgue's theorem: If  $l(\eta) \rightarrow 0$  as  $\eta \rightarrow 0$ , there exists a measurable set  $E$  for almost all of whose points  $\frac{mE \text{ in } (\theta - \eta, \theta + \eta)}{2\eta} = 1 - L(\eta)$ , where  $L(\eta) \rightarrow 0$  as  $\eta \rightarrow 0$  and  $l(\eta) = o(L(\eta))$ . An analogous extension of Vitali's covering theorem is given. Similar results for functions of two variables are also stated.

*W. Seidel* (Cambridge, Mass.).

**Raynor, G. E.:** The Dirichlet-Neumann problem for the sphere. Ann. of Math., II. s. 35, 74—99 (1934).

Soit  $D$  le domaine intérieur à une sphère  $S$  de centre  $C$ . L'aut. se propose de trouver une fonction  $V$  harmonique dans  $D - C$ , connaissant les valeurs continues prises sur  $S$  par  $V$  et par la dérivée suivant la normale. Soit  $r$  la distance d'un point quelconque à  $C$ ; à toute fonction de Laplace on peut faire correspondre deux fonctions de  $r$ , dont les produits par cette fonction sont harmoniques en tout point autre que  $C$ , et telles que l'un de ces produits et la dérivée normale de l'autre s'annulent sur  $S$ . L'aut. trouve d'abord que le développement de  $V$  suivant ces produits est entièrement déterminé puis donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que la solution existe effectivement. Enfin l'aut. établit que pour un domaine même non sphérique, où une fonction  $V$  doit être harmonique sauf peut être en un point donné,  $V$  est déterminé d'une manière unique par les valeurs que prennent sur  $S$  la fonction et sa dérivée normale. L'aut. suppose nouveau son théorème II, qui peut pourtant s'énoncer d'une façon plus générale, déjà signalée en grande partie [Ann. École norm. 46, 175 (1929)].

*Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).



**Niklibore, W., und W. Stożek:** Über die Grenzwerte des logarithmischen Potentials der Doppelbelegung. *Fundam. Math.* 22, 109—135 (1934).

Ist  $W(P) = \int_C f(s) \frac{\cos(n, r)}{r} ds$  das Potential der Doppelbelegung einer geschlossenen

Kurve  $C$  der sog. Klasse  $Ah$ , so gelten bekanntlich für Punkte  $s \in C$  die Formeln (1):  $W_+(s) = W(s) + \pi f(s)$ ,  $W_-(s) = W(s) - \pi f(s)$ . Die Verff. beweisen nun Sätze, die als Erweiterungen dieser klassischen Ergebnisse angesehen werden können. Erstens legen sie ihren Betrachtungen nur ein stetig differenzierbares Kurvenstück  $y = f(x)$  zugrunde und setzen voraus, daß an einer Stelle, nämlich am Anfang von  $C$  (dieser Endpunkt möge der Abszisse  $x = 0$  entsprechen), die Ableitung  $f'(x)$  eine Abschätzung der Form (2)  $|f'(x)| \leq A|x|^\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) zuläßt (dies ist weniger als die Hölder-Bedingung auf dem ganzen Kurvenstück). Zweitens genügt es, die Dichte als in der  $\frac{1}{\lambda} + \varepsilon$ -ten Potenz ( $\varepsilon > 0$ ) integrierbar anzunehmen (für  $\lambda = 1$  kann  $\varepsilon = 0$  gesetzt werden). Unter diesen Voraussetzungen wird das Verhalten des Potentials  $W(P)$  bei der Annäherung an den Endpunkt untersucht, in welchem (2) besteht (d. h. in unserem Falle  $x = 0$ ). Diese Aufgabe wird nun auf die analoge für dasjenige Geradenstück  $C_1$  zurückgeführt, welches  $C$  in  $x = 0$  berührt. Es erweist sich nämlich — unter  $W_1(P)$  ein passendes über  $C_1$  ausgebreitetes Potential der Doppelbelegung verstanden — die Differenz  $W(P) - W_1(P)$  als stetig, falls man die Punkte  $P$  auf Winkelräume beschränkt, die in  $x = 0$ ;  $y = f(0)$  münden, aber die Kurve  $C$  nicht tangieren.

Es wird weiter die Endlichkeit der Zahlen  $\overline{\lim}_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma f(s) ds = H$ ,  $\lim_{0 < \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma f(s) ds = h$

postuliert und für  $\overline{\lim}_{P \rightarrow y=f(0), 0} W(P)$  und  $\lim_{P \rightarrow f(0), 0} W(P)$  eine Reihe von Ungleichheiten abgeleitet, welche diese Größen in Beziehung mit  $H$  und  $h$  setzen. Dabei hängt die Art der Grenzüngleichheiten (vier Ungleichheiten) von dem Grenzwinkel ab, unter welchem  $P \rightarrow f(0)$ ,  $0$  strebt (tangentielle Annäherung bleibt ausgeschlossen). Daraus können verschiedene andere Resultate gewonnen werden, daß z. B. im Falle einer Kurve  $C$  der Klasse  $Ah$  Formel (1) fast überall auf  $C$  gilt. Ein Gegenbeispiel zeigt endlich, daß sich diese Ungleichheiten im gewissen Sinne nicht verallgemeinern lassen. *Schauder* (Lwów).

● **Brelot, Marcel:** Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point. (*Actualités scient. et industr. Nr. 139. Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand. III.*) Paris: Hermann & Cie. 1934. 55 S.

S'appuyant sur les travaux de F. Riesz, qu'il résume et dont il complète certaines démonstrations, l'aut. étudie plus particulièrement les fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point  $O$ , mais non nécessairement sousharmoniques en  $O$ ; l'étude faite s'applique à un espace à un nombre quelconque de dimensions, mais l'aut., par raison de commodité, présente ses raisonnements pour le cas du plan, en signalant les points où la généralisation n'est pas évidente. La proposition la plus importante, dans cette étude, et qui est due à Riesz, est que la valeur moyenne d'une fonction sousharmonique  $u$ , sur une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $r$ , est une fonction convexe de  $\log(1/r)$ . A ce point de départ est liée l'importante notion de flux de  $u$  en  $O$ : si les dérivées de  $u$  existent et sont continues au voisinage de  $O$ , le flux est la limite de  $\int (du/dn) ds$  (normale intérieure) le long d'une circonférence infiniment petite de centre  $O$ ; une définition tout à fait générale est énoncée par l'aut.; le flux peut avoir une valeur finie ou être égal à  $+\infty$ . L'aut. montre finalement que ses résultats s'appliquent aux questions suivantes: 1° Relativement à l'équation  $\Delta u = 0$ , la solution du problème généralisé de Dirichlet (au sens de Wiener) admet une valeur moyenne en tout point de la frontière, en un sens pour lequel l'aut. renvoie à une note antérieure (ce Zbl. 6, 203), pourvu que la distribution soit continue. 2° Relativement aux équations  $\Delta u = \varphi(M)$  et  $\Delta u = c(M)u$ , où  $\varphi$  et  $c$  sont continus en tout point assez voisin

de  $O$  et distinct de  $O$ ,  $c$  étant en outre  $\geq O$ , l'aut. reprend l'étude faite dans sa thèse (ce Zbl. 2, 259), et la complète sur certains points; il montre notamment que la dernière équation admet, dans certains cas, des intégrales bornées discontinues en  $O$ .

*Georges Giraud* (Bonny-sur-Loire).

**Winants, Marcel:** Équations du troisième ordre à caractéristiques réelles. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 20, 207—221 (1934).

Classification de problèmes et solutions relatifs aux équations linéaires du troisième ordre et de forme spéciale, dont quelques-uns sont classiques, d'autres posés par l'A. et traités dans des notes précédentes.

*Hans Lewy* (Providence).

**Peretti, Giuseppe:** Carattere tensoriale delle onde associate a fenomeni. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 67, 99—108 (1934).

Ableitung der charakteristischen Gleichung für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, wie sie etwa bei T. Levi-Civita „Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Bologna 1931“; dies Zbl. 3, 114 zu finden ist. *Rellich*.

**Leray, Jean, et Alexandre Weinstein:** Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 430—432 (1934).

Es wird angedeutet, wie in einer späteren Arbeit für ebene Potentialströmungen mit teils polygonal vorgegebenem, teils freiem Rande die lokale Eindeutigkeit bewiesen und aus ihr Existenz und absolute Eindeutigkeit gefolgert werden soll; dabei wird nur vorausgesetzt, daß die Totalkrümmung kleiner als  $\pi$  ist. Ferner wird u. a. die Behandlung dieser Probleme für den Fall nicht polygonaler Grenzen mit topologischen Methoden angekündigt.

*K. Friedrichs* (Braunschweig).

**Jacob, Caius:** Sur le problème d'unicité locale concernant l'écoulement des liquides pesants. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 539—541 (1934).

Für die ebene Potentialströmung mit einem zum Teil freien Rande wird die lokale Eindeutigkeit bewiesen unter Berücksichtigung der Schwere.

*K. Friedrichs*.

**Murray, F. H.:** Optical paths in the ionosphere. Amer. J. Math. 56, 259—268 (1934).

Verf. behandelt die Fortpflanzung eines elektromagnetischen „Strahles“ in der durch das magnetische Erdfeld doppeltbrechend gewordenen ionisierten Erdatmosphäre. Als Ausdruck für die Beziehung zwischen der dielektrischen Verschiebung und der elektrischen Feldstärke wird Hartrees Matrix benutzt. Für die Phase wird dann eine Differentialgleichung erster Ordnung und vierten Grades gewonnen, die als Jakobi-Gleichung eines Hamiltonschen Differentialsystems gedeutet werden kann. Sobald die Phase bekannt ist, kann der Ausdruck für die elektrische Feldstärke asymptotisch durch sukzessive Approximation berechnet werden. Die Rechnungen sind denjenigen von J. Hadamard zur Diskussion der Charakteristiken eines Systems von partiellen Differentialgleichungen analog. Eines der Ergebnisse ist, daß die Trajektorien der Hamiltonschen Gleichungen in erster Annäherung den Poyntingschen Vektor berühren, soweit die Absorption des Mediums vernachlässigbar klein ist.

*Strutt*.

### Spezielle Funktionen:

**Popov, A.:** Über einige bestimmte Integrale mit Zylinderfunktionen. C. R. Acad. Sci. URSS 2, 11—12 u. franz. Zusammenfassung 12 (1934) [Russisch].

The author first notes that

$$\int_0^{\infty} K_0(px) J_\nu(ax) J_\nu(bx) dx = \int_0^{\infty} J_0(px) K_\nu(ax) I_\nu(bx) dx,$$

and deduces, among other results, the formula

$$\int_0^{\infty} J_0(\sqrt{\rho}x) K_\nu\left(\sqrt{x} \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}\right) I_\nu\left(\sqrt{x} \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{(\rho + \alpha)(\rho + \beta)}} \left(\frac{\sqrt{\rho + \alpha} - \sqrt{\rho + \beta}}{\sqrt{\rho + \alpha} + \sqrt{\rho + \beta}}\right)^\nu \quad (1)$$



where  $R(\nu) > -1$ ,  $R(\sqrt{\beta}) > 0$ ; and similarly he finds the value of the integral

$$\int_0^{\infty} J_0(\sqrt{\varrho} x) K_{\nu} \left( \sqrt{x} \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2} \right) K_{\nu} \left( \sqrt{x} \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{2} \right) dx.$$

The particular cases of (1) when  $\nu = 0$ ,  $\nu = 1$  have previously been given by Watson, J. London Math. Soc. (3) 1928, 22—27. W. N. Bailey (Manchester).

**Košliakov, N.:** On a certain definite integral connected with the cylindric function  $J_{\mu}(x)$ . C. R. Acad. Sci. URSS 2, 145—147 (1934) [Russisch].

The subject of the present paper is a simple proof of the formula (1).

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F[\nu - \mu, -\mu, \nu + 1, (\varphi(\lambda))^2] \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k'^2}} \right)^{2\mu} \frac{[\varphi(\lambda)]^{\nu} J_{\mu}(\varrho \lambda)^{\lambda^{\mu+1}} d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + k^2)(\lambda^2 + k'^2)}} \\ = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + \mu + 1)} (2\varrho)^{\mu} I_{\nu} \left( \varrho \frac{k - k'}{2} \right) K_{\nu} \left( \varrho \frac{k + k'}{2} \right), \end{aligned}$$

$$R(\mu) > -1, R(\mu + 2\nu + \frac{3}{2}) > 0.$$

Autoreferat.

**Shastri, N. A.:** On the expansion of Bessel functions in a series of Mathieu functions and on a property of Mathieu functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 29—40 (1934).

Bei der Reihenentwicklung von Besselschen Funktionen nach Mathieuschen Funktionen geht Verf. von der bekannten Reihenentwicklung Mathiescher Funktionen nach Besselschen Funktionen erster Art aus und beweist dann die Konvergenz der entstandenen Reihen. Zum Schluß wird eine Beziehung zwischen Mathieuschen Funktionen erster Art verschiedener Ordnung für kleine Werte des Parameters abgeleitet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

**Whipple, F. J. W.:** On transformations of terminating well-poised hypergeometric series of type  ${}_9F_8$ . J. London Math. Soc. 9, 137—140 (1934).

This paper is concerned with the two known transformations of terminating well-poised hypergeometric series of the type  ${}_9F_8$ . One of these transformations is verified by a simple application of the theory of equations, the method of verification being that due to Dougall. The other transformation can then be deduced by repeating the formula already proved.

W. N. Bailey (Manchester).

**Shabde, N. G.:** On some results involving the  $k$ -function, a particular case of the confluent hypergeometric function. Proc. Benares Math. Soc. 14, 23—29 (1932).

The author obtains two expansions which may be included in a single formula

$$x \cos(x - \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \theta\right) k_{2n}(x).$$

The roots of  $k_{2n}(z)$  are discussed with the aid of a theorem due to A. Milne. — Evaluations are given for integrals of type

$$\int_0^{\infty} \exp[x - ax] x^{\mu} k_{2n}(x) C_m \sqrt{x(1 - a^2)} dx$$

where  $C_m(z)$  is a cylinder function. Three different forms of  $C_m$  are considered and the constants  $a$ ,  $\mu$ ,  $m$ ,  $n$  are subjected to various restrictions. The author also evaluates some associated integrals.

H. Bateman (Pasadena).

**Shabde, N. G.:** „On a system of spherical harmonics.“ Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 139—158 (1934).

Since  $r^n P_n^m(\cos\theta) \sin^{\cos} m\varphi$  is a solution of Laplace's equation, it follows that

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial m^p \partial n^q} \left\{ r^n P_n^m(\cos\theta) \sin^{\cos} m\varphi \right\}$$

is also a solution. In this paper formulae are obtained for this expression when  $p = 0$  and when  $q = 0$ . In the general case, when neither  $p$  nor  $q$  is zero, the formulae become

very complicated and the general results are not given. One of the simplest formulae obtained is

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \right\} \\ = r^n \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi} \left[ \log r \cdot P_n^m - \frac{1}{2n+1} P_n^m + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (2n+2p+3)}{(p+1)(2n+p+2)} P_{n+p+1}^m \right. \\ \left. - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-1)^p (2n-2p-1)}{(p+1)(2n-p)} P_{n-p-1}^m \right].$$

W. N. Bailey (Manchester).

**Chao, Robert F. H.:** A formal theorem on the derivatives of a series of zonal harmonics. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **13**, 41—45 (1934).

Es seien  $r$  und  $\vartheta$  ebene Polarkoordinaten; Verf. stellt Reihendarstellungen für die partiellen Ableitungen der Funktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \vartheta) \quad (r > a) \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \vartheta) \quad (r < a)$$

nach den rechtwinkligen Koordinaten  $x$  und  $y$  auf ( $P_n$  das  $n$ -te Legendresche Polynom,  $a > 0$ ) und gibt hinreichende Konvergenzbedingungen für die Gültigkeit dieser Entwicklungen an. Als Anwendung wird das magnetische Potential eines Stromes in einem kreisförmigen Drahte mit gegebener Intensität studiert. Szegő (Königsberg).

**Segre, B.:** Sugli integrali di differenziali binomii. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 279—283 (1934).

Unter der Voraussetzung, daß keine der rationalen Zahlen  $l$ ,  $\frac{h+1}{k}$ ,  $l + \frac{h+1}{k}$  ganz ist, ist das binomische Integral

$$\int x^h (a + bx^k)^l dx$$

entweder ein Abelsches Integral 1. Gattung oder ein transzendentes Abelsches Integral zweiter Gattung, also jedenfalls nicht elementar auswertbar. Kähler (Hamburg).

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Jonesco, D. V.:** Deux théorèmes sur une équation intégrale-différentielle. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 1377—1378 (1933).

Verf. hat die Integrodifferentialgleichung

$$x^n \frac{d^n z}{dz^n} + p_1(x) x^{n-1} \frac{d^{n-1} z}{dz^{n-1}} + \dots + p_n(x) z = f(x) + \int_0^x N(x, s) z(s) ds \quad (1) \\ (p_i(x), N(x, s) \text{ holomorph for } |x|, |s| \leq R)$$

jetzt auch für den Fall behandelt, wo  $f(x)$  von der Form  $x^r \sum_{i=0}^k g_i(x) (\log x)^i$  ( $g_i(x)$  holomorph für  $|x| \leq R$ , Realteil  $r > -1$ ) ist und die Existenz eines Integrals derselben Gestalt bewiesen, vorausgesetzt, daß die Fuchssche determinierende Gleichung der linken Seite keine Wurzel der Form  $r + p$  ( $p$  ganz  $\geq 0$ ) besitzt. (Vgl. dies. Zbl. **7**, 347.)

Kähler (Hamburg).

**Ghermanesco, M.:** Sur un système d'équations à une infinité d'inconnues. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1293—1295 (1934).

The entire function  $g(x) = \sum g_n x^n / n!$  is assumed to satisfy the conditions  $|g(x)| < |P_p(x)| e^{(q+\varepsilon)|x|}$ ,  $\limsup_n |g^{(n)}(x)|^{1/n} = q$  for all  $x$ ,  $P_p(x)$  being a polynomial of degree  $p$ . Then the Pincherle adjoint  $\mathfrak{P}(g) = \sum g_n / z^{n+1}$  converges for  $|z| > q$ . It is shown that if  $\mathfrak{P}(g)$  is meromorphic, poles being at most of order  $p+1$ , then  $g(x)$  has a uniformly convergent and unique development of the form

$$\sum_1^{\infty} (c_{n0} + c_{n1} x + \dots + c_{np} x^p) e^{\xi_n x},$$



the infinite system of equations obtained by equating coefficients being shown to be equivalent to

$$\mathfrak{P}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^p k! c_{nk} / (z - \xi_n)^{k+1}$$

which determines the  $\xi_n$  and  $c_{nk}$ .

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Michal, A. D., and R. S. Martin:** Some expansions in vector space. J. Math. pures appl., IX. s. 13, 69—91 (1934).

Die Verff. betrachten vektorielle, normierte und vollständige Räume  $E$  vom Typus „ $B$ “, in welchen noch zwei weitere Axiome erfüllt sind. Das erste von diesen Zusatzaxiomen besagt, daß zu je zwei Elementen  $x_1, x_2$  ihr Produkt  $x_1 \cdot x_2$  erklärt ist — eine bilineare Operation der beiden Variablen von der Norm eins. In bezug auf die in jedem „ $B$ “-Raume vorhandene Addition und in bezug auf die nun postulierte „Multiplikation“ der Elemente, soll  $E$  einen algebraischen Ring bilden, wobei die Einheit  $I$  der Multiplikation die Norm 1 besitzen möge. Das zweite Axiom fordert die Existenz eines speziellen linearen Funktional  $z = f(x)$  für  $x \in E$  — welches die Verff. mit  $[x]$  bezeichnen — mit den Eigenschaften  $[x_1 \cdot x_2] = [x_2 \cdot x_1]$ ;  $z$  durchläuft hier die reellen oder die komplexen Zahlen. Zu erwähnen wäre noch, daß die in dieser Arbeit vorkommenden „ $B$ “-Räume die Multiplikation ihrer Elemente mit dem reellen Zahlensystem oder eine solche mit dem komplexen System zulassen sollen. Es folgen Beispiele derartiger Räume, z. B. die Gesamtheit der Matrizen  $t$  von  $n^2$  Elementen  $t_i^k$

mit der Spur  $\sum_{i=1}^n t_i^i$  als dem  $[t]$ -Funktional. Nun kann man eine Funktionaloperation

$B(x)$  und ein Funktional  $D(x)$  definieren.  $D(x)$  entspricht der Fredholmschen Determinante in der Theorie der Integralgleichungen, während  $B(x)$  als Verallgemeinerung des ersten Fredholmschen Minors aufgefaßt werden kann. Über  $D(x)$  und  $B(x)$  beweisen die Verff. einige Sätze. So z. B. erweisen sich  $D$  und  $B$  als analytisch in der Umgebung der Stelle  $x = 0$ . Der Konvergenzradius der entsprechenden abstrakten Taylorsche Reihe ist nicht kleiner als 1 (diese Grenze wird in speziellen Fällen in der Tat erreicht).  $D(x), B(x)$  sind weiter im Frechetschen Sinne für  $\|x\| < 1$  differenzierbar. Im Texte wird noch der Begriff einer Rotation eingeführt und manche Beziehungen dieses Begriffes zum Problem der inversen Funktionaloperation (Elementes) näher erörtert.

Schauder (Lwów).

## Variationsrechnung:

**McShane, Edward James:** Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations. I. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 183—211 (1934).

The author attacks the problem of deducing a set of sufficient conditions which shall be less restrictive than those hitherto given for the existence of the absolute minimum of a non-parametric integral  $I[y] = \int F(x, y_1, \dots, y_q, y'_1, \dots, y'_q) dx$ . In particular he wishes to include the special case when  $I[y] = \int \Phi(y)[1 + y'^2]^{1/2} dx$ . His method is to study the corresponding parametric integral

$$J[C] = \int G(x, y_1, \dots, y_q, \dot{x}, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_q) dt$$

where

$$G(x, y_1, \dots, y_q, \dot{x}, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_q) = \dot{x} F(x, y_1, \dots, y_q, \dot{y}_1/\dot{x}, \dots, \dot{y}_q/\dot{x}).$$

This integral is well-defined for a certain class of rectifiable curves having  $\dot{x}(t) \geq 0$ . In this Part I, certain fundamental relations between properties of the two integrals  $I[y]$  and  $J[C]$  are established, and it is shown that when the integral  $I[y]$  is positive quasi-regular semi-normal, it is lower semi-continuous. For integrals in three or more dimensions, this last result is much stronger than any previously derived.

Graves (Chicago).

**McShane, Edward James:** Concerning the semi-continuity of ordinary integrals of the calculus of variations. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 239—241 (1934).

This note gives a much shorter method of proof for one of the theorems of the

author's paper "Existence theorems for ordinary problems of the calculus of variations. I." (See the preceding rev.) *Graves (Chicago).*

**Tonelli, Leonida:** *Sulle proprietà delle estremanti.* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 213—237 (1934).

An extremaloid for an integral  $I_C = \int f(x, y, y') dx$  is defined to be an absolutely continuous curve  $C: y = y(x)$ , for which the functions  $f[x, y(x), y'(x)]$ ,  $f_y[x, y(x), y'(x)]$ ,  $f_{y'}[x, y(x), y'(x)]$  are integrable (Lebesgue) and satisfy the equation

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_{y'}[x, y(x), y'(x)] dx - \int_a^x f_y[x, y(x), y'(x)] dx = \text{const.}$$

A pseudo-extremaloid is defined similarly except that the function  $f_y$  is replaced by  $f_x$ , and  $f_{y'}$  is replaced by  $(f - y' f_{y'})$ . Under certain conditions every freely variable arc of a minimizing curve for the integral  $I_C$  must be an extremaloid. In this paper this conclusion is obtained under weaker hypotheses on the integrand  $f(x, y, y')$  than those hitherto given. A number of theorems are given relating to additional properties which every extremaloid for  $I_C$  must possess when the integrand  $f(x, y, y')$  has certain additional properties. In Chap. II, corresponding theorems are obtained with the word "extremaloid" replaced by "pseudo-extremaloid". In Chap. III, it is shown that when the integral  $I_C$  is "quasi-regular normal", every freely variable arc of a minimizing curve must have a continuously turning tangent and must satisfy the Euler differential equation almost everywhere.

*Graves (Chicago).*

**Douglas, Jesse:** *A Jordan space curve no arc of which can form part of a contour which bounds a finite area.* Ann. of Math., II. s. 35, 100—103 (1934).

Completing previous results obtained partly in collaboration with P. Franklin (see this Zbl. 6, 176 and 350), the author exhibits a Jordan curve with the property described in the title of the paper. The construction depends upon the remark, due to Hadamard, that there exist continuous functions on the perimeter of the unit circle such that the corresponding harmonic functions have an infinite Dirichlet integral.

*Tibor Radó (Columbus).*

### Funktionentheorie:

**Estermann, Theodor:** *Bemerkung zu meiner Arbeit „Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz“.* Math. Z. 38, 641 (1934).

**Pompeiu, Dimitrie:** *Un problème relatif à la monogénéité des fonctions d'une variable complexe.* C. R. Soc. Sci. Varsovie 26, 15—17 (1933).

In einem Gebiet  $D$  der komplexen  $z$ -Ebene sei eine stetige komplexwertige Funktion  $f(z)$  gegeben. Der Verf. stellt die (nicht weiter präzierte) Frage nach der Beschaffenheit der allgemeinsten (?) Teilmenge von  $D$ , in deren Punkten eine passende in  $D$  stetige Funktion  $F(z)$  (im Sinne der Funktionentheorie) differenzierbar ist und die Ableitung  $f(z)$  besitzt. Mit Hilfe von Integralen lassen sich leicht Funktionen  $F(z)$  angeben, die diese Eigenschaft in einzelnen Punkten oder Strecken besitzen.

*W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Noshiro, Kiyoshi:** *On the univalence of certain analytic functions.* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 2, 89—101 (1934).

Vom  $f(z) = c_0 z + c_1 z^2 + \dots$  sei bekannt, daß es in  $|z| < 1$  regulär ist und daß die Werte von  $\zeta = \frac{f(z)}{z}$  einem gegebenen Bereich  $D$  angehören, dessen Rand aus mindestens 3 Punkten besteht. Dann läßt ein nur von  $D$  und  $c_0$  abhängiges  $\varrho(D, c_0) < 1$  angeben, derart, daß in  $|z| < \varrho$   $f(z)$  sternig ist. Der Verf. bestimmt  $\varrho(D, c_0)$  für die Bereichstypen:  $|\zeta| < M$ ,  $\Re \zeta > 0$ ,  $0 < |\zeta| < M$ ,  $0 < m < |\zeta| < M$ . Im drittgenannten Falle wird ferner die beste untere Schranke für die Minimaldistanz des Randes des Bildbereiches von  $|z| < \varrho(D, c_0)$  bestimmt. — Im Falle  $|\zeta| < M$  werden die entsprechenden Fragen beantwortet, wenn man sich die beiden Koeffizienten  $c_0, c_1$



gegeben denkt. — Im Schlußparagraphen wird die Schlichtheitsschranke der Klasse der Funktionen  $f(z) = \alpha + \beta z + \dots$  bestimmt, die in  $|z| < 1$  regulär sind, gegebene erste Koeffizienten  $\alpha, \beta (\beta \neq 0)$  besitzen und deren Realteil  $\Re f(z) > 0$  ist im ganzen Einheitskreis.

K. Löwner (Prag).

**König, Karl:** Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen. Mitt. math. Ges. Hamburg 7, 238—239 (1934).

Der Verf. beweist: Ist  $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$  und  $|\alpha^2 + \beta| \geq 1$  oder  $|3\alpha^2 + 2\beta| \geq 3$ , so hat  $1 - \alpha z - \beta z^2$  eine Nullstelle im Innern des Einheitskreises. Daraus folgert er, daß dort bei der ersten Voraussetzung  $\Phi(z) = \frac{z}{1 - \alpha z^2 - \beta z^4}$ , bei der zweiten  $\varphi(z) = \frac{z}{(1 - \alpha z - \beta z^2)^2}$  nicht schlicht sein können.

K. Löwner (Prag).

**Whittaker, J. M.:** On the asymptotic periods of meromorphic functions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 34—42 (1934).

In einer vorigen Arbeit (dies. Zbl. 6, 353) definierte der Verf. den Begriff einer asymptotischen Periode und zeigte, daß dieselben bei einer ganzen Funktion sämtlich auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen und daß sie eine Punktmenge vom Maße Null bilden. Die entsprechende Untersuchung wird hier für eine meromorphe Funktion durchgeführt. Es gibt dann zwei Fälle: 1. die asymptotischen Perioden sind abzählbar viele, aber können überall dicht in der Ebene liegen; 2. sie liegen auf einer Geraden durch den Ursprung. Es ist wahrscheinlich, daß die asymptotischen Perioden im zweiten Falle wieder eine Nullmenge bilden, aber der Nachweis ist dem Verf. nicht gelungen.

Ahlfors (Helsingfors).

**Valiron, G.:** Entire functions and Borel's directions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 211—215 (1934).

Es gibt ganze Funktionen, die sich durch Dirichletsche Reihen darstellen lassen. Mandelbrojt und Gergen haben die horizontalen Juliaschen Geraden solcher ganzen Funktionen untersucht (s. dies. Zbl. 1, 22). Verf. teilt mit, daß die Methoden, mit deren Hilfe er die Borelschen Richtungen ganzer Funktionen studiert hat (vgl. dies. Zbl. 8, 317), auch hier anwendbar sind; er zeigt, daß die erwähnten „Dirichletschen ganzen Funktionen“ nicht nur horizontale Juliasche Geraden, sondern auch horizontale Borelsche Geraden besitzen. Eine kurze Skizze der Beweise ist angegeben. — Bei der Gelegenheit gibt Verf. auch zwei andere Sätze über ganze Funktionen, die einige seiner früheren Sätze verallgemeinern (s. dies. Zbl. 3, 263, 6, 261 und 8, 119 — Rauch).

Vlad. Bernstein (Milano).

**Wolski, Alexander:** Bemerkung zu meiner Abhandlung: Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes. [Diese Zeitschrift 24 (1925).] Math. Z. 38, 642 (1934).

**Wolkow, D. M., und A. A. Nasarow:** Über ein Randwertproblem der Funktionentheorie und seine Anwendung auf das ebene Problem der Elastizitätstheorie. Appl. Math. a. Mech. 1, 209—227 u. dtsh. Zusammenfassung 227 (1933) [Russisch].

Diese Abhandlung ist eine Entwicklung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 7, 313). Die Verff. geben einige Anwendungen, die zweifach zusammenhängenden Gebieten angehören.

Janczewski (Leningrad).

**Cotton, Émile:** Étude locale d'une surface et de certaines intégrales. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1285—1288 (1934).

Durch  $f(x, y, z) = 0$  sei uns  $y$  als Funktion von  $x$  und  $z$  gegeben. Verf. faßt die singulären Stellen von  $f$  ins Auge;  $x = y = z = 0$  sei eine solche. Er betrachtet ein Integral  $J(z) = \int_L g(x, y, z) dx$ , wo der geschlossene Weg  $L$  in der komplexen  $x$ -Ebene

liegt,  $z$  als Parameter auftritt und für  $y$  die eben definierte Funktion von  $x$  und  $z$  einzusetzen ist. Er beweist, daß  $J(z)$  sich in der Umgebung des Nullpunktes in eine reguläre Fuchssche Reihe entwickeln läßt, wobei  $\log z$  nur linear vorkommt. — Zum Beweis denkt sich Verf.  $f(x, y, z)$  in der Umgebung der singulären Stelle in eine Potenz-

reihe entwickelt. Die 3 Exponenten jedes Gliedes faßt er als die Koordinaten eines diesem Gliede zugeordneten Punktes in einem 3-dimensionalen Raume auf. Er betrachtet das kleinste konvexe Polyeder, das alle Punkte umspannt, denen Glieder mit nicht verschwindenden Koeffizienten entsprechen. Dieses Polyeder liefert uns die zur Aufstellung der Fuchsschen Reihe notwendigen Gegebenheiten. *Ott-Heinrich Keller.*

**Hornich, Hans:** Bemerkungen zu einer speziellen Klasse von Riemannschen Flächen. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 8, 78—83 (1934).

Untersuchungen von Funktionen der Form  $f(z) = \sum (z - a_i)^{\alpha_i}$  und ihrer Riemannschen Flächen. Es wird behandelt: Konvergenzbedingung, Verhalten im Unendlichen, Integrale erster Gattung, Transformationsgruppe. *Ahlfors (Helsingfors).*

**Aumann, G., und C. Carathéodory:** Ein Satz über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Gebiete. Math. Ann. **109**, 756—763 (1934).

Es sei  $G$  ein mehrfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet der  $z$ -Ebene, das von mindestens drei Punkten begrenzt ist und  $z = 0$  im Innern enthält.  $f(z)$  sei eine in  $G$  definierte analytische Funktion, die nur Werte aus  $G$  annimmt und die im Nullpunkt verschwindet. Dann gilt der „Starrheitssatz“: Ist  $|f'(0)| = 1$ , so ist  $f(z)$  eine der endlich vielen Funktionen, die  $G$  umkehrbar eindeutig auf sich selbst abbilden. In allen übrigen Fällen ist  $|f'(0)| < \Omega$ , wo  $\Omega$  eine nur von  $G$  abhängige Konstante bedeutet, die kleiner ist als Eins. Für beschränkte Bereiche ist der Satz im wesentlichen vom zweitgenannten Verf. bereits in Math. Z. **34**, 786 (1932) (dies. Zbl. **3**, 407) bewiesen worden. *K. Löwner (Prag).*

**Zarankiewicz, Kasimir:** Sur la représentation conforme d'un domaine doublement connexe sur un anneau circulaire. C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1347—1349 (1934).

Die vorliegende Untersuchung des Verf. über die konforme Abbildung eines 2fach zusammenhängenden Bereiches der  $z$ -Ebene auf einen Kreisring stützt sich auf Arbeiten von Stefan Bergmann. (Bergmann führt zu jedem Bereich eine Kernfunktion  $\kappa(z, \bar{z})$  ein, die diesem invariant gegenüber analytischen Abbildungen zugeordnet ist und die ihrerseits eine Riemannsche Metrik mit  $ds^2 = \kappa(z, \bar{z}) |dz|^2$  definiert.) Der Verf. rechnet nun  $\kappa(z, \bar{z})$  explizit für den Kreisring aus und bespricht an Hand dieses Resultates Eigenschaften der Bildbereiche. Aus dieser Arbeit geht vor allem die Zweckmäßigkeit des Bergmannschen Ansatzes zur Behandlung konformer Abbildungen bei numerisch gegebenen Bereichen hervor. *Behnke (Münster, Westf.).*

**Zarankiewicz, K.:** Über ein numerisches Verfahren zur konformen Abbildung zweifach zusammenhängender Gebiete. Z. angew. Math. Mech. **14**, 97—104 (1934).

Verf. führt im einzelnen die in C. R. Acad. Sci., Paris **198**, 1347—1349 (1934); vgl. vorst. Ref. angekündigten, auf der Theorie von Stefan Bergmann aufgebauten Überlegungen durch. *Behnke (Münster, Westfalen).*

**Krzoska, Johannes:** Über die natürlichen Grenzen analytischer Funktionen mehrerer Veränderlicher. Greifswald: Diss. 1933. 21 S.

**Jacob, Caius:** Sur le problème de Dirichlet pour les fonctions de plusieurs variables complexes. Bull. Sci math., II. s. **58**, 108—112 (1934).

Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion  $f(w, z)$  sind bekanntlich biharmonische Funktionen der vier reellen Veränderlichen  $u, v, x, y$  ( $w = u + iv, z = x + iy$ ). Verf. gibt nun im Falle eines Dizylinders  $\mathfrak{B}: |w| < a, |z| < b$  eine notwendige und hinreichende Integralbedingung an, damit eine auf der Bestimmungsfläche  $|w| = a e^{i\vartheta}, |z| = b e^{i\varphi}$  gegebene Funktion  $\Phi(\vartheta, \varphi)$  dort die Spur einer im Innern von  $\mathfrak{B}$  biharmonischen Funktion ist; zugleich bestimmt er explizit die durch  $\Phi$  bis auf eine Konstante festgelegte in  $\mathfrak{B}$  analytische Funktion  $f(w, z)$ . Andere Lösungen des Dirichletschen Problems für Dizylinder (bzw. allgemeinere Bereiche mit Bestimmungsfläche) wurden bereits von L. Nikliborg [C. R. Acad. Sci., Paris **180** (1925), **182** (1926)] und St. Bergmann [Math. Ann. **104** (1931); dies. Zbl. **1**, 215] angegeben. Die Lösung im Falle eines beliebigen Bereiches mit regulärem Rande stammt von Severi; hier muß die Spur, die auf dem ganzen Rande vorgegeben ist, zwei Diffe-



rentialbedingungen genügen [Mem. Accad. Ital. 2, Mat. N. 1 u. N. 5 (1931); dies. Zbl. 3, 213 u. 214; Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI 13 (1931); dies. Zbl. 2, 342]. *Thullen.*

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Lévy, Paul:** Sur les espaces  $V$  et  $W$ . C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1203—1205 (1934). Suite d'une note précédente [C. R. Acad. Sci., Paris 198, 786—788 (1934); ce Zbl. 8, 367]. Si l'on soustrait de  $x(t)$  une fonction indépendante de l'hasard, une fonction à discontinuités fixes et un terme gaussien, la loi des probabilités de  $x(t)$  devient alors parfaitement définie par la fonctions des sauts  $N(h, t)$ . On obtient en effet dans ce cas pour la fonction caractéristique  $E(e^{izx}) = \Phi(z, t)$  l'expression suivante:

$$\log \Phi(z, t) = \lim_{u', u'' \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{u'' + \infty} + \int_{-\infty}^{u'} \right) (e^{izu} - 1) d_u N(u, t).$$

La note termine par quelques indications sur des propriétés différentielles des fonctions  $x(t)$ .

*A. Kolmogoroff (Moskau).*

**Hostinský, Bohuslav:** Sur la théorie des chaînes de Markoff et sur l'intégration des transformations linéaires. Čas. mat. fys. 63, 167—185 u. franz. Zusammenfassung 185 (1934) [Tschechisch].

Rappel des théorèmes fondamentaux de la théorie des chaînes et de quelques compléments qui y ont été ajoutés par Kaucký, Konečný, Potoček et Fréchet. Suivant Fréchet [voir Ann. Scuola norm. super. Pisa 2, 131—164 (1933)] les quantités  $s_{jk}$  qui se présentent dans la théorie de la dispersion se déterminent par la résolution d'un système d'équations linéaires. Si les quantités  $p_{ik}$  qui définissent la chaîne ne sont pas toutes positives, la limite de  $P_{ik}^{(n)}$  n'existe pas en général, mais la limite de moyennes arithmétiques (limite au sens de Cesàro) existe toujours (Fréchet, ibid.). — Une généralisation de la notion de chaîne conduit au

système d'équations  $K^{n+1}(x, y) = \int_b^a K^{(n)}(x, z) K(z, y) dz$ ; une autre donne l'équation de Chap-

man  $\Phi(x, y, s, t) = \int_a^b \Phi(x, z, s, u) \Phi(z, y, u, t) dz$ . Pour résoudre ces équations il faut revenir à

la méthode d'intégration des substitutions linéaires introduite par Volterra en 1887. Volterra a montré comment cette intégration (composition d'une suite infinie de substitutions infinitésimales) donne la solution des équations différentielles linéaires. D'une manière analogue, l'intégration des transformations fonctionnelles donne la solution de l'équation de Chapman. La recherche des fonctions de Green pour l'équation de la chaleur et pour le problème de Dirichlet se ramène à l'étude de cette équation. En intégrant un autre type des transformations fonctionnelles linéaires on trouve la solution d'une équation fonctionnelle considérée par Hadamard en 1903.

*Autoreferat.*

**Hopf, Eberhard:** On causality, statistics and probability. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 13, 51—102 (1934).

Die Frage nach der Entstehung der stabilen Häufigkeiten in Massen- und Wiederholungsvorgängen ist von entscheidender Bedeutung für die wissenschaftliche Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Einen Weg zur Lösung dieser Frage gibt die von Poincaré herrührende „Methode der willkürlichen Funktionen“; die gegenwärtig besonders verbreitete Form dieser Methode (Theorie der Markoffschen Ketten), die schon im erzeugenden Mechanismus gewisse Wahrscheinlichkeitsverhältnisse voraussetzt, kann jedoch deswegen zur Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs nur wenig beitragen; vielmehr muß man dazu von rein kausal wirkenden Mechanismen ausgehen. Im Phasenraum eines solchen Mechanismus wird jeder makroskopisch definierte Zustand durch eine gewisse Punktmenge  $A$  repräsentiert; ist  $A$  meßbar, und ist  $B$  eine andere meßbare Menge, bedeutet ferner  $B_t$  das Bild von  $B$  nach Abschluß der Zeitstrecke  $t$ , so kann es geschehen, daß  $m(AB_t)/m(B)$  (wo  $m$  ein Zeichen für das Mengenmaß ist) für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen bestimmten Grenzwert  $L(A)$  konvergiert, der von der gewählten Menge  $B$  unabhängig ist. Ist das der Fall, so führt eine ganz beliebige genügend glatte Verteilung der Anfangszustände nach hinreichend langer Zeit zu einer ganz bestimmten, von der Ausgangsverteilung unabhängigen Häufigkeit des durch  $A$  repräsentierten makroskopischen Zustandes. Es ist zu vermuten, daß die Mehrzahl

der konservativen sowie zerstreuen Mechanismen dieses Verhalten aufweist. Betrachtet man den Phasenraum als hydrodynamisches Modell, so ist der erläuterte Fall mit der „vollständigen Vermischung von Flüssigkeiten“ äquivalent. Auf diese Weise erhält das in der neuesten Literatur oftmals behandelte „Mischungsproblem“ eine ausschlaggebende prinzipielle Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. — In diesem Zusammenhang werden nun die wichtigsten Ergebnisse der allgemeinen metrischen Bewegungstheorie besprochen: die Ergodensätze von Birkhoff, Carleman und v. Neumann und die Mischungssätze vom Verf. und von Koopman und v. Neumann. Auch einige interessante neue Resultate werden gegeben, darunter die wichtigsten: 1. ein neuer Mischungssatz: für die Mischungseigenschaft eines konservativen Mechanismus ist notwendig und hinreichend, daß die Strömung in dem durch die Multiplikation seines Phasenraums mit sich selbst entstehenden Raum metrisch transitiv sei; 2. die kontinuierliche Verteilung der Anfangszustände im Phasenraum ist lediglich eine Idealisierung eines wirklichen Massen- oder Wiederholungsvorgangs; zu einer adäquaten Behandlung eines solchen ist hingegen eine abzählbare Folge von Anfangszuständen zu wählen; im Raum aller solcher Folgen wird nun eine Maßbestimmung getroffen; es wird gezeigt, daß für einen Mechanismus vom Mischungstypus fast alle Folgen dieselbe Häufigkeit eines gegebenen makroskopischen Zustandes aufweisen; 3. die Abhandlung enthält eine Reihe von ausführlich besprochenen Beispielen.

*A. Khintchine (Moskau).*

**Campbell, J. T.: The Poisson correlation function.** Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 18—26 (1934).

This paper is a natural extension to the distribution of two or more correlated variables of the use of factorial moments and factorial moment generating functions as applied in a previous paper by the author for one variable. — The regression lines for the Poisson case turn out to be linear, though they do not, as in the case of ordinary normal correlation, give the most probable value of one variable corresponding to any value of the other, but they give the mean value. The correlation coefficient defined as the geometric mean of the two regression coefficients turns out to have the same value in products and variances as the ordinary Pearsonian coefficient. — The general correlation function of the Type *B* is given and it is shown that in the limit there results the same moment generating function as for the Poisson correlation function, and thus the same general kind of frequency function. In the last section a numerical example is given to illustrate the theoretical formulas of double Poisson correlation. *Rietz.*

**Gulberg, Alf: On discontinuous frequency functions of two variables.** Skand. Aktuarie Tidskr. 17, 89—117 (1934).

Die vom Verf. früher (vgl. dies. Zbl. 6, 359) für den eindimensionalen Fall entwickelte Methode zur Auffindung passender theoretischer Verteilungsfunktionen mit Hilfe von Differenzgleichungen wird nun auf den zweidimensionalen Fall angewandt. Speziell werden Bernoullische, Poissonsche, Pascalsche und hypergeometrische Verteilungen behandelt. Numerische Beispiele.

*A. Khintchine (Moskau).*

**Crathorne, A. R.: Moments de la binomiale par rapport à l'origine.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1202 (1934).

Une formule récurrente pour les moments d'une distribution binomiale:

$$m_{n+1} = m_1 m_n + p q \frac{d m_n}{d P}. \quad A. Kolmogoroff (Moskau).$$

● **Kostitzin, V. A.: Symbiose, parasitisme et évolution.** (Étude mathématique.) (Actualités scient. et industr. Nr. 96. Exposés de biométrie et de statistique biologique. Publiés de Georges Teissier. II.) Paris: Hermann & Cie 1934. 47 S. et 1 Fig. Frcs. 15.—

Eine Darstellung und weitere Entwicklung der Untersuchungen von A. J. Lotka, W. R. Thompson und V. Volterra über die Differentialgleichungen der Biologie.

*A. Kolmogoroff (Moskau).*



**Montessus de Ballore, R. de:** Détermination des écarts probable dans la fonction binomiale. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 54, 83—86 (1934).

**Koeppler, Hans:** Das Hattendorffsche Risiko für Versicherungen mit mehrfachen Auflösungsmöglichkeiten. Versicherungsarch. 4, 983—995 (1934).

## Geometrie.

● **Hessenberg, Gerhard:** Ebene und sphärische Trigonometrie. 4. Aufl. (Samml. Götschen. Bd. 99.) Berlin u. Leipzig: Walter de Gruyter 1934. 171 S. u. 59 Fig. geb. RM. 1.62.

**Thébault, V.:** Triangle bordé de triangles isocèles semblables. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 54, 86—96 (1934).

**Thébault, V.:** Sur le cercle des neuf points du triangle. Gaz. mat. 39, 339—343 (1934).

**Niculescu, Alexandru:** Über einige Theoreme der Dreiecksgeometrie. Gaz. mat. 39, 343—345 (1934) [Rumänisch].

● **Liebmann, Heinrich:** Synthetische Geometrie. (Teubners math. Leitfäden. Bd. 40.) Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1934. VIII, 119 S. u. 45 Fig. RM. 5.60.

Eine kurzgefaßte Darstellung der projektiven Geometrie der Ebene (S. 1—96) und des dreidimensionalen Raumes (S. 96—109). Axiomatische Begründung, keine Anlehnung an metrische Vorkenntnisse. Abgesehen von dem weit geringeren Umfang, erinnert das Buch an die Projective Geometry von Veblen und Young. Zunächst werden nur Axiome der Verknüpfung und der Existenz eingeführt. Durch zwei „Fano-Axiome“ werden dann die finiten Geometrien ausgeschlossen. Die dann folgende Behandlung der Hauptsätze der ebenen projektiven Geometrie (Desargues, Pappus-Pascal, Fundamentalsatz) weicht von der üblichen ab; sie werden bewiesen mittels zwei „Vertauschungssaxiomen“: Wenn sechs Punkte in bestimmter Reihenfolge eine Pascalfigur bilden, so bleibt diese Eigenschaft bei gewissen Vertauschungen der Punkte erhalten. — Obwohl die synthetische Behandlungsweise durch analytische Betrachtungen illustriert wird, fehlt eine systematische Einführung des Koordinatenbegriffs (mittels Wurfrechnung oder einer anderen geometrischen Algebra) in das geometrisch definierte System und damit der Nachweis, daß jede Realisierung, welche dem Axiomensystem genügt, mit einer (allgemeinen) Koordinatengeometrie isomorph ist. — Die Kegelschnitte werden mit dem Pascalschen Satz definiert. Um die Polarentheorie und die Theorie des Kegelschnittbüschels entwickeln zu können, werden zwei „schwache“ Stetigkeitsaxiome eingeführt (welche analytisch bedeuten, daß das System realisierbar ist in dem durch Adjunktion von zweiten und dritten Radikalen erweiterten Körper der rationalen Zahlen), woraus außerdem hervorgeht, daß der Verf. sich auf reelle Figuren beschränkt. — Es folgt ein Kapitel über das vollständige Viereck, eines über die Projektivität auf linearen Trägern, und zwei Kapitel über die Kegelschnittlehre. Bemerkenswert ist dabei, daß der Ponceletsche Schließungssatz aufgenommen worden ist; merkwürdigerweise beruht der Beweis auf zwei neuen Stetigkeitsaxiomen, die nicht weiter benutzt werden. — Das nächste Kapitel betrachtet die Kollineationen der Ebene; die Existenz der Deckpunkte geht aus den schwachen Stetigkeitsaxiomen hervor. Bemerkungen über die Cayleymetrik, natürlich nur für den hyperbolischen Fall. Hinweise auf die Raumgeometrie. Konfigurationen. Aufgaben. O. Bottema (Sappemeer, Holl.).

● **Morley, Frank, and F. V. Morley:** Inversive geometry. London: G. Bell & Sons, Ltd. 1933. IX, 273 S. u. 67 Fig. geb. 16/-.

Hauptsächlich handelt es sich um Geometrie der reellen kartesischen  $x$ - $y$ -Ebene unter Zugrundelegung der isotropen Koordinaten  $z = x + yi$ ,  $\bar{z} = x - yi$  und Hinzunahme eines unendlichfernen Punktes. Mit diesem einheitlichen formalen Apparat werden überaus verschiedenartige geometrische Fragen, und zwar vor allem anschaulich interessante, bewältigt. Proben des Inhalts: Einführung des Logarithmus durch einfache Konstruktionen, Beziehung der Exponentialfunktion zur Merkatortprojektion und zur Traktrixkurve. — Zusammensetzung dreier Streckungen führt zur Desargueskonfiguration, Zusammensetzung dreier Drehungen zu einer Konfiguration von 8 Punkten, die je zu viert auf je einem von 6 Kreisen liegen, Zusammensetzung von Umklappungen löst die Aufgabe, in ein gegebenes  $(2n + 1)$ -Eck ein  $(2n + 1)$ -Eck kleinsten Umfangs einzubeschreiben. — Diskussion der Möbius-Gruppe, und insbesondere der endlichen Untergruppen, die ein System von 3 oder 4 Punkten allgemeiner oder spezieller Lage in sich überführen. — Hyperbolische Raumgeometrie (die  $z$ ,  $\bar{z}$ -Ebene als Absolutfläche eines Poincaréschen Modells gedeutet, wobei den Punktepaaren der Ebene die Geraden des hyperbolischen Raums entsprechen), insbesondere Trigonometrie des Graden-

tripels allgemeiner Lage; Konfiguration von 10 Graden (des hyperbolischen oder euklidischen Raums), in der jede Grade von drei anderen senkrecht getroffen wird, als Verallgemeinerung der Desargues-Konfiguration. — Hydromechanische Veranschaulichung einfacher Fälle konformer Abbildung durch Zusammensetzung von Quellen und Senken usw., Grenzlinien zwischen verschiedenen Quell- und Wirbelgebieten. — Differentialinvarianten der Möbius-Gruppe und der wichtigsten Untergruppen, Schwarzsche Polygonabbildung. — Kurvengleichungen der Form  $f(x, \bar{x}) = 0$ ; die zugehörige Abbildung  $f(x, \bar{y}) = 0$ , Übergang zu Linienkoordinaten und Fokaltheorie. — Darstellung ungefähr der gesamten Dreiecksgeometrie auf 15 Seiten. Kardioiden und dreispitzige Hypozykloide (diese Kurven und gewisse allgemeinere hat man zu betrachten, wenn man auf eine naheliegende Art die Fragen der Dreiecksgeometrie auf ein 4- oder  $n$ -Sei überträgt). — Das Buch ist im Telegrammstil geschrieben und stellt erhebliche Anforderungen an den Leser. Unnötig erschwert wird die Lektüre durch viele Druckfehler, mangelnde Übereinstimmung der Figuren mit den Textbezeichnungen und ganz unzulängliches Stichwortverzeichnis. S. 246 wird fälschlich behauptet, das Innere der dreispitzigen Hypozykloide sei der kleinste ebene Bereich, in dem ein Stab gewisser Länge umgewendet werden kann (vgl. A. S. Besicowitsch, Math. Z. 27, 312). — Der Inhalt, besonders aber die formalen Methoden des Buchs dürften teilweise neu und als Ausgangspunkt eingehender Untersuchung geeignet sein. Viele Kapitel dürften sich auch zum Thema von Vortragsseminaren eignen.

Cohn-Vossen (Zürich).

Lyons, R. J., and R. Frith: The Petersen-Morley theorem. I. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 192—196 (1934).

Frith, R.: The Petersen-Morley theorem. II. Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 197—199 (1934).

Der Satz von Petersen-Morley wird unter Einführung des absoluten Kegelschnittes projektiv verallgemeinert und in der verallgemeinerten Form synthetisch bewiesen. Dabei werden in der 1. Note nur elementare Mittel (Proj. Punktreihen, Regelflächen 2. Ordnung) benutzt, während die 2. Note unter Benutzung höherer Hilfsmittel (Korrespondenzen, Regelflächen 4. Ordnung) einen etwas kürzeren Beweis bringt.

E. A. Weiss (Bonn).

Kommerell, K.: Berichtigung zu der Arbeit von Karl Kommerell: „Gebietsteilung durch eine Kurve zweiter Ordnung“, dieser Band S. 307—312. Math. Ann. 109, 764 (1934).

Der vom Verf. gegebene Beweis des Jordanschen Kurvensatzes für Kurven zweiter Ordnung (vgl. dies. Zbl. 8, 269) enthält in seinen Voraussetzungen Stetigkeitsannahmen; die Stetigkeit ist also bei dem Beweis nicht eliminiert. R. Moufang (Frankfurt).

Ganapathi, P.: The vector-regions of convex closed bodies. Math. Z. 38, 488—489 (1934).

Es sei  $K$  ein konvexer Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes und  $W$  der zugehörige Vektorkörper. Aus einer Minkowskischen Ungleichung wird für die Volumina dieser Körper die scharfe Ungleichung  $V(W) \geq 2^n V(K)$  gefolgert, die übrigens ein Spezialfall des Brunn-Minkowskischen Satzes ist. Auch eine obere Schranke für den Quotienten  $V(W)/V(K)$  wird angegeben, und zwar die bestmögliche, wenn man das vom Verf. nicht erklärte Zeichen  $nC$ , als Binomialkoeffizienten ( $\binom{n}{C}$ ) deutet. Vgl. Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Erg. Math. 3, H. 1, S. 105 (1934).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Ganapathi, P.: A note on the oval. Math. Z. 38, 490—491 (1934).

Ist  $b(\varphi)$  der Abstand der parallelen Stützgeraden der Richtung  $\varphi$  eines ebenen konvexen Bereichs, so ist die Anzahl der dem Bereich umschreibbaren Quadrate gleich der Nullstellenzahl der Funktion  $f(\varphi) = b(\varphi) - b(\varphi + \pi/2)$  in  $0 \leq \varphi < \pi/2$ . Verf. behauptet, daß diese Anzahl, falls endlich, stets ungerade sei. Ohne Beschränkung darf  $f(0) \neq 0$  angenommen werden. Dann erkennt man dies wegen  $b(\varphi + \pi) = b(\varphi)$ , also  $f(0) = -f(\pi/2)$  sofort als richtig, wenn  $f$  in jeder Nullstelle das Vorzeichen wechselt, was vom Verf. stillschweigend angenommen wird, aber gewiß nicht immer zutrifft. — Dasselbe gilt für die Anzahl der Spitzen der „Mediane“, das ist der Ort der Mittelpunkte der Durchmesser eines konvexen Bereichs, wobei unter Durchmesser die Verbindungsstrecke der Berührungspunkte paralleler Stützgeraden verstanden wird. Hier hat man  $f(\varphi) = \varrho(\varphi) - \varrho(\varphi + \pi)$  zu betrachten, wo  $\varrho$  der Krümmungsradius ist.

W. Fenchel (Kopenhagen).



**Tricomi, F.:** Un'interpretazione intuitiva del rotore e della condizione d'irrotazionalità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 399—401 (1934).

**Di Noi, Salvatore:** Considerazioni geometriche sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a sè stesso. Accad. Sci. Fis. e Mat. Napoli, Rend., IV. s. 3, 176—181 (1934).

L'a. étudie analytiquement le complexe des droites contenant les vecteurs vitesses des points d'un corps en mouvement, déformable avec conservation de similitude. [Voir aussi, Reveille, Étude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui même, Thèse, Chalamel, Paris, 1905; J. Lemaire, Sur l'égalité et la similitude des figures dans l'espace, Nouv. Ann. Math. 83, (1926).]

*Abramesco (Cluj).*

**Hjelslev, J.:** Einige Studien über Produktverhältnisse. Mat. Tidsskr. B H. 1, 1—10 (1934) [Dänisch].

Auf jeder Seite eines geschlossenen, mit einem Durchlaufungssinn versehenen Polygons sei ein Punkt gewählt. Unter dem zugehörigen Produktverhältnis (nach Möbius „Vieleckschnittsverhältnis“) wird dann das Produkt der Teilverhältnisse verstanden, in denen die Seiten durch die auf ihnen gewählten Punkte geteilt werden. — In der Ebene seien zwei geschlossene orientierte Polygone gleicher Eckenzahl und ein Punkt  $O$  gegeben. Die Ecken jedes der Polygone mögen unter Wahrung der zyklischen Reihenfolge eineindeutig den Seiten des anderen zugeordnet sein, und zwar so, daß die Inzidenzbeziehungen zwischen Ecken und Seiten bei dieser Zuordnung erhalten bleiben. Man projiziere nun die Ecken jedes der Polygone von  $O$  aus auf die entsprechenden Seiten des anderen. Dann sind die beiden zugehörigen Produktverhältnisse zueinander reziprok. Dieser Satz enthält eine große Zahl bekannter Sätze von Ceva, Desargues, Möbius u. a. Für „Zweiecke“, d. h. hin und zurück durchlaufene Strecken, besagt der Satz insbesondere die Invarianz des Doppelverhältnisses bei Zentralprojektion. Bei Verwendung der vom Verf. eingeführten einfachen Bezeichnung  $\hat{a}$  für denjenigen Vektor, der aus einem Vektor  $a$  durch Drehung im (festzusetzenden) positiven Sinne um  $\frac{\pi}{2}$  entsteht, läßt sich der Satz unmittelbar ablesen.

Man hat dazu nur zu bemerken: 1. Sind  $a, b, c$  Ortsvektoren von  $O$  aus, so hat das Teilverhältnis, in dem die Strecke mit den Endpunkten  $b$  und  $c$  von der Geraden  $a$  geteilt wird, den Wert  $\frac{b\hat{a}}{c\hat{a}}$  (skalare Produkte). 2. Es ist  $ba = -a\hat{b}$ . — Der Satz gilt auch für räumliche Polygone, wenn von einer Geraden statt von einem Punkt aus projiziert wird. — Ferner werden duale und weitere analoge Beziehungen angegeben, sowie projektive Beweise für diese wegen der Projektivinvarianz des Produktverhältnisses projektiven Sätze angedeutet.

*W. Fenchel (Kopenhagen).*

**Bompiani, E.:** Sopra alcune configurazioni spaziali. Period. Mat., IV. s. 14, 73 bis 89 (1934).

Sei  $P_1 P_2 \dots P_n P_1$  ein geschlossener Polygonzug (in der Ebene oder im Raum) und  $Q_i$  ein Punkt auf der Strecke  $P_i P_{i+1}$  ( $i \bmod n$ ). Für die zugehörigen Punktvektoren läßt sich dann schreiben  $Q_i = P_i + \sigma_i P_{i+1}$ . Durch die Relation  $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n = 1$  wird nun eine Beziehung zwischen den  $Q_i$  festgelegt, die gestattet, aus beliebigen  $n - 1$  der  $Q_i$  den  $n$ -ten Punkt eindeutig und projektiv invariant zu bestimmen. Diese Beziehung läßt sich in den einfachsten Fällen leicht geometrisch deuten, beim Dreieck bedeutet sie, daß die drei Geraden  $P_i Q_{i+1}$  (Punkt-Gegenecke) durch einen Punkt gehen (Ceva), beim windschiefen Viereck, daß die beiden Geraden  $Q_1 Q_3$  und  $Q_2 Q_4$  sich treffen, beim schiefen 5-Eck, daß die 5 Geraden  $P_i Q_{i+2}$  einer linearen Kongruenz angehören. — Sei nun ein „orientierbares“ Gitter gegeben, d. h. eine Anzahl von Verbindungsstrecken zwischen endlich vielen Punkten, die sich so mit orientierten geschlossenen Polygonzügen belegen läßt, daß jede Strecke genau zweimal, beidemale im entgegengesetzten Sinne, durchlaufen wird. Auf jeder Kante des Gitters sei ein Punkt

festgelegt. Dann wird der Satz gezeigt: Wenn diese Punkte in allen, bis auf einen, der oben zur Orientierung benutzten Polygonen die im ersten Teil angegebene ausgezeichnete Lage haben, so auch im letzten. — Eine ähnliche Gitterkonfiguration führt auf eine quadratische Korrespondenz von zwei Ebenen und könnte dienen zur Untersuchung der Kongruenz der Verbindungsgeraden korrespondierender Punkte dieser Ebenen.  
G. Bol (Hamburg).

**Bompiani, E.: Determinazione delle superficie iperspaziali con un sistema triplamente infinito di curve razionali normali.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 89—93 (1934).

Eine Fläche, die  $\infty^3$  rationale Normalkurven  $C_\mu$  der Ordnung  $\mu$  enthält, die sich zu je zweien in zwei Punkten treffen, läßt sich birational abbilden auf einer quadratischen Fläche  $Q$  im  $R_3$ ; die Kurven korrespondieren mit den ebenen Schnitten von  $Q$ . Wenn  $Q$  kein Kegel ist, ist die Fläche das Abbild von einem System von Kurven der Ordnung  $\mu$  auf  $Q$ , etwa das System, das eine Schar von Erzeugenden von  $Q$  in  $\nu$  Punkten, die andere Schar in  $\nu'$  Punkten ( $\mu = \nu + \nu'$ ) trifft. Die Fläche enthält dann eine einparametrische Schar von  $C_\nu$ , und eine Schar von  $C_{\nu'}$ , die sich zu je zweien in einem Punkte treffen, ihre Normaldimension ist  $\nu\nu' + \nu + \nu'$ , ihre Ordnung  $2\nu\nu'$ , und es gibt  $\infty^\nu$  Kegel  $V_{\nu'(\nu'+1)}^{\nu'}$  und  $\infty^{\nu'}$  Kegel  $\nu_{\nu'(\nu'+1)}^{\nu'}$ , die die Fläche enthalten. Ist  $Q$  ein Kegel, so ändert sich nichts Wesentliches, die Scharen der  $C_\nu$  und  $C_{\nu'}$  fallen zusammen, wenn  $\nu = \nu'$  ist, wenn  $\nu' > \nu$ , so spaltet sich ein fester  $C_l$  ab ( $l = \nu' - \nu$ ). Die maximale Dimension bei vorgegebenem  $\mu$  ist  $\frac{\mu^2}{4} + \mu$  ( $\nu = \nu'$ ) für  $\mu = 2k$ , und  $\frac{\mu^2 - 1}{4} + \mu$  ( $\nu' = \nu + 1$ ) für  $\mu = 2k + 1$ .  
G. Bol (Hamburg).

### Algebraische Geometrie:

**Thalberg, Olaf M.: Properties of the general pencil of cubics derived by means of plane involutions.** Avh. Norske Vid. Akad. Oslo Nr 4, 1—11 (1934).

Die Punkte  $S_i$  ( $i = 1, \dots, 9$ ) seien die Grundpunkte eines Büschels von Kurven 3. Ordnung in der Ebene. Zeichnet man zwei davon  $S_8, S_9$  aus und ordnet man zwei Punkte  $P$  und  $P'$  einer  $C^3$  des Büschels einander dann zu, wenn ihre Verbindungslinie durch den 3. Schnittpunkt der  $C^3$  mit der Verbindungslinie von  $S_8, S_9$  läuft, so erhält man eine involutorische Verwandtschaft  $I_8$ , die Geisersche Verwandtschaft. — Zeichnet man 5 Punkte  $S_i$  aus und ordnet man zwei Punkte  $P, P'$  einer  $C^3$  des Büschels einander dann zu, wenn ihre Verbindungslinie durch den 6. Schnittpunkt der  $C^3$  mit dem Kegelschnitt durch die ausgezeichneten Punkte läuft, so erhält man eine Verwandtschaft  $I_{11}$ , die den Hauptgegenstand der Arbeit bildet. Eigenschaften der Fixpunktkurve  $K^7$ . Mit Hilfe der  $I_{11}$  und  $I_8$  werden nun mit dem  $C^3$ -Büschel verbundene Orte untersucht: der Ort der Wendepunkte der  $C^3$  des Büschels (eine Kurve  $C^{12}$  mit dreifachen Punkten in  $S_i$ ) und der Ort ihrer sextaktischen Punkte (eine Kurve  $C^{45}$  mit zwölffachen Punkten in  $S_i$ ).  
E. A. Weiss (Bonn).

**Green, H. G., and L. E. Prior: Systems of triadic points on a cubic.** Amer. Math. Monthly 41, 253—255 (1934).

Eigenschaften von Punktetripeln der elliptischen  $C^3$ , die folgendermaßen definiert sind: Der zu einem Punkte des Tripels (in einer bestimmten Hesseschen Korrespondenz) konjugierte Punkt liegt auf der Verbindungslinie der beiden anderen Punkte.  
E. A. Weiss (Bonn).

**Albanese, Maria: Sui triangoli tangenziali di una cubica piana.** Ist. Lombardo, Rend., II. s. 67, 121—128 (1934).

Die Anzahl der „Tangentialdreiecke“ [vgl. E. Ciani, dies. Zbl. 4, 269 (1932)] einer Kurve 3. Ordnung vom Geschlechte 1 oder 0 wird mittels des Korrespondenzprinzips ermittelt. Unter Benutzung der Gruppe der automorphen Kollineationen einer elliptischen  $C^3$  wird dann gezeigt, daß die 24 Tangentialdreiecke dieser Kurve sich auf 4 Systeme zu je 6 verteilen. In jedem der Sechstupel bestimmt jedes Dreieck drei



Paare zusammengehöriger Dreiecke. Von diesen Paaren gibt es 36, und ihre Besonderheit besteht darin, daß sie Tangentialdreiecke für eine zweite  $C^3$  sind, und zwar, verglichen mit der Ausgangskurve im umgekehrten Sinne. (D. h. ist  $A$  Tangentialpunkt von  $B$  auf der ersten Kurve, so ist  $A$  Tangentialpunkt von  $C$  auf der zweiten Kurve usw.) Sonderfälle der harmonischen und äquianharmonischen Kurve. (Ein gleichzeitig veresserter Fehler der Arbeit von Ciani ist schon in dies. Zbl. 8, 27 von G. Gallina richtiggestellt worden.)

E. A. Weiss (Bonn).

Oehlert, M.: Über die Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante. J. reine angew. Math. 171, 42—54 (1934).

On sait comment — d'après C. Segre [Atti Accad. Sci. Torino 31, 485 (1896)] — on peut exprimer l'invariant  $Z$  de Zeuthen-Segre d'une surface algébrique  $F$  quelconque, en fonction des caractères d'un faisceau générique de courbes tracé sur  $F$ , faisceau qui est constitué par les courbes de niveau constant d'une fonction  $w$  du corps algébrique à deux variables indépendantes relatif à  $F$ . Récemment F. Severi [Comment. math. helv. 4, 268 (1932); ce Zbl. 5, 176 (1932)] et H. W. E. Jung [Mem. Accad. Ital. 4, 403 (1933); ce Zbl. 8, 130 (1934)] ont obtenu des résultats en quelque sorte analogues au précédent, en substituant la considération d'une intégrale (resp. picardienne ou non totale) du corps, à celle de la fonction  $w$ ; ici l'a. (en suivant une marche semblable à celle, de caractère arithmétique, du dernier travail cité) parvient à une nouvelle définition de  $Z$ , se rapportant à la différentielle  $dw$  d'une fonction quelconque du corps susdit.

Beniamino Segre (Bologna).

Ramamurti, B.: On the rank of a quadric related to the rational norm curve. J. London Math. Soc. 9, 102—104 (1934).

Wählt man als binäres Gebiet eine Normalkurve  $C^n$  des  $R_n$  und bildet man eine Form  $(cx)^n$  in bekannter Weise auf einen  $R_{n-1}$  dieses  $R_n$  ab, so bestimmen zwei Formen  $(ax)^{n+1}$  und  $(bx)^{n+1}$  eine  $M_{n-1}^2$ :  $(ab)(ac)^n(ac')^n = 0$ . Es wird gezeigt, daß diese  $M_{n-1}^2$  höchstens den Rang 4 besitzt. Ihr Punktort ist also eine — im allgemeinen reguläre — Fläche 2. Ordnung. Von dieser wird bewiesen: Eine Erzeugende 1. Art ist der Ort der Bildpunkte der ersten Polaren eines Punktes der  $C^n$  in bezug auf alle Formen des von  $(ax)^{n+1}$  und  $(bx)^{n+1}$  aufgespannten Büschels. Eine Erzeugende 2. Art ist der Ort der Bildpunkte der ersten Polaren aller Punkte der  $C^n$  in bezug auf eine feste Form des Büschels.

E. A. Weiss (Bonn).

Albanese, Giacomo: Corrispondenze algebriche fra i punti di due superficie algebriche. II. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 3, 149—182 (1934).

Fortsetzung der Untersuchungen über  $(\alpha, \beta)$ -Korrespondenzen zwischen zwei algebraischen Flächen  $F, F'$  im Falle wo  $F \equiv F'$ . Wenn eine algebraische Korrespondenz  $T$  zwischen den Punkten von  $F$  die Kurven  $A$  eines vollständigen kontinuierlichen Systems  $\{A\}$  in die Kurven  $A'$  verwandelt, und wenn die Kurve  $\gamma A + A'$  ein Linearsystem beschreibt, während  $A$  in  $\{A\}$  sich bewegt, so nennt man  $\gamma$  die Wertigkeit der Korrespondenz  $T$ ;  $\gamma$  ist eine eindeutig bestimmte und von der Wahl des Systems  $\{A\}$  unabhängige ganze Zahl ( $\geq 0$ ). Wenn die Korrespondenzen  $T, S$  die Wertigkeiten  $t, s$  haben, so sind  $t + s$  und  $-ts$  die Wertigkeiten der Korrespondenzen  $T + S$  und  $TS$ ; man kann so, von gewissen „Elementarkorrespondenzen“ ausgehend, Korrespondenzen mit beliebigen Wertigkeiten konstruieren (in einer Elementarkorrespondenz entsprechen jedem allgemeinen Punkte  $P$  der Fläche die weiteren Schnittpunkte der durch  $P$  hindurchgehenden Kurven eines gegebenen Kurvennetzes). Die von H. G. Zeuthen betrachteten Korrespondenzen, wo die einem allgemeinen Punkte  $P$  entsprechenden Punkte  $P_1 P_2 \dots P_\beta$  von einer mit  $P$  veränderlichen Kurve auf  $F$  geschnitten werden, haben eine Wertigkeit  $k \geq 0$ ; und  $k$  bedeutet die Multiplizität, die die veränderliche Kurve in  $P$  besitzt. Die Zeuthenschen Korrespondenzprinzipien für die Flächen werden hier zu allen Korrespondenzen ausgedehnt, die aus solchen des Zeuthenschen Typus linear zusammengesetzt sind. — Es folgt eine analytische Behandlung der  $(\alpha, \beta)$ -Korrespondenzen auf  $F$ ; diese verläuft der bekannten Hurwitzschen

Behandlung der Korrespondenzen auf einer Kurve ganz ähnlich; man kann nämlich eine Korrespondenz  $T$  mit einem Gleichungssystem darstellen:

$$u_k(y_1) + u_k(y_2) + \dots + u_k(y_\beta) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k, \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

wo  $y_1 y_2 \dots y_\beta$  die dem Punkte  $x$  entsprechende Punkte sind,  $\pi_{ki}$  und  $\pi_k$  Konstanten, und  $u_k$  ein System von  $q$  einfachen normalen Integralen 1. Gattung der Fläche bedeuten. Man gewinnt daraus, wie in der Hurwitzschen Theorie, ein Gleichungssystem zwischen den Perioden der Integrale  $u_k$ ; im Falle einer Wertigkeitskorrespondenz sind diese Gleichungen identisch erfüllt; hier hat man also auch, daß Korrespondenzen ohne Wertigkeit nur auf „singulären“ Flächen existieren können. Es folgt eine Reihe topologischer Betrachtungen über das Verhalten der linearen und der dreidimensionalen Zykel von  $F$  gegenüber  $T$ ; es gelten insbesondere zwei Sätze, die ein topologisches Äquivalenzkriterium für Kurven auf einer Fläche und die eine Konstruktion eines Systems von  $2q$  unabhängigen dreidimensionalen Zykeln enthalten. Schließlich wird die Existenz einer Basis  $T_1 T_2 \dots T_\rho$  für die Korrespondenzen  $T$  bewiesen; so daß für jede  $T$  eine Korrespondenz  $\lambda T + \lambda_1 T_1 + \dots + \lambda_\rho T_\rho$  mit der Wertigkeit Null existiert; es ist  $\rho \leq 2q^2$ ; hat  $F$  allgemeine Moduln, so reduziert sich die Basis  $T_1 T_2 \dots T_\rho$  zur identischen Korrespondenz  $H$ ; der Begriff der Basis kann aber auch anders begründet werden (I. vgl. dies. Zbl. 4, 413).

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Dixon, A. L., and V. C. Morton: Planes, points, and surfaces associated with a cubic surface.** Proc. London Math. Soc., II. s. 37, 221—240 (1934).

Die 120 konjugierten Steinerschen Triederpaare einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung haben verschiedenen Verf. Veranlassung gegeben, die Eigenschaften der mit der Fläche verbundenen Konfiguration (27 Geraden, konjugierte Triederpaare, Schursche und Milnesche Flächen 2. Ordnung usw.) noch weiter zu vertiefen. Es werden hier die 120 X-Punkte besonders betrachtet [s. A. L. Dixon, Proc. London Math. Soc., II s. 26, 351 (1927)]. Zu jedem Steinerschen Triederpaar werden zwei andere assoziiert, so daß die Spitzen der 6 Trieder die Spitzen eines vollständigen ebenen Vierzehnecks bilden, dessen Diagonalen sich in drei X-Punkten  $X_1 X_2 X_3$  schneiden. Solcher X-Punktetripel gibt es 40. Drei Punkte wie  $X_1 X_2 X_3$  haben dieselbe Polarebene in bezug auf  $F^3$ . Die 120 X-Punkte liegen zu je vier in 810 Ebenen: 540 Ebenen „1. Art“ enthalten je eine Gerade der Fläche, und 270 Ebenen „2. Art“ enthalten je drei geeignete Schnittpunkte von zwei Geraden der Fläche (ohne Dreitangentialebenen zu sein); durch jeden X-Punkt gehen 18 Ebenen 1. Art und 9 Ebenen 2. Art hindurch; jede Gerade der Fläche liegt auf 20 Ebenen 1. Art; jeder Schnittpunkt von 2 Geraden der Fläche liegt auf 6 Ebenen 2. Art usw. In den Rechnungen spielt die Steinersche Gleichungsform der Fläche:  $uvw = u'v'w'$  eine wichtige Rolle; es werden die Werte von  $uvwu'v'w'$  als überzählige Koordinaten benutzt.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Roth, L.: On surfaces of sectional genus five.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 123—133 (1934).

Fortsetzung einer vorhergehenden Untersuchung desselben Verf. (s. dies. Zbl. 6, 416); mit derselben Methode werden jetzt die normalen singularitätenfreien Flächen der Hyperräume diskutiert, deren hyperebenen Schnittkurven das Geschlecht 5 haben. Es werden auch Sätze angewendet, die Verf. in einer anderen Arbeit bewiesen hat (s. dies. Zbl. 8, 220—221). Schließlich ein Verzeichnis der singularitätenfreien Flächen 7. Ordnung der Hyperräume, das hier nicht angegeben werden kann.

*Togliatti.*

**Bronowski, J.: The surfaces whose prime-sections contain a  $g_3^1$ .** Proc. Cambridge Philos. Soc. 30, 170—177 (1934).

Die Betrachtung der Flächen mit hyperelliptischen Schnittkurven lassen sich auf diejenigen Flächen ausdehnen, deren Schnittkurven (ein Geschlecht  $> 4$  haben, und) eine Linearschar  $g_3^1$  enthalten. Verf. betrachtet singularitätenfreie und normale Flächen, die keine Regelflächen sind, und ein Büschel von Kurven 3. Ordnung enthalten; er teilt sie in folgende vier Typen ein: Flächen mit einem Büschel von Raum-



kurven 3. Ordnung; rationale Flächen mit einem Büschel elliptischer Kurven 3. Ordnung; irrationale Flächen mit einem Büschel elliptischer Kurven 3. Ordnung, und die auf einer kubischen Hyperfläche liegen; und solche die keiner kubischen Hyperfläche angehören. Die rationalen Typen werden auf eine Ebene abgebildet. Die irrationalen Typen werden als Schnitte einer Mannigfaltigkeit  $V_3^q$  (eines Raumes  $S_{q+2}$ ), Ort von  $\infty^1$  Ebenen, mit geeigneten Hyperflächen konstruiert; es folgt daraus ihre Darstellung auf gewissen Flächen  $F^x$  des Raumes  $S_3$  mit einer  $(x-3)$ -fachen Gerade; es folgt auch die Bestimmung der betreffenden Werte von  $p_g, p_a$ ; usw. *E. G. Togliatti.*

**Bolus, F.:** Sur les systèmes linéaires de surfaces à intersections variables elliptiques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 1250—1253 (1933).

Bemerkung über  $\infty^3$  Linearsysteme algebraischer Flächen vom Grade 2, deren veränderliche Schnittkurven elliptisch sind; solche Systeme besitzen immer eine endliche Anzahl von Fundamentalkurven oder -flächen. (Die Behauptung auf S. 1252, daß die Kurven  $H - \nu r$  rational seien, hängt von der Anzahl der Punkte ab, die die Gerade  $r$  mit der Doppelfläche  $\mathcal{V}$  von  $\nu_3$  gemein hat.) *E. G. Togliatti* (Genova).

**Johnson, Roberta F.:** Involutions of order two associated with the surfaces of genera  $p_a = p_g = 0, P_2 = 1, P_3 = 0$ . Amer. J. Math. 56, 199—213 (1934).

Einige analytische Erläuterungen über die Involutionen 2. Ordnung mit

$$p_a = p_g = P_3 = 0 \quad \text{und} \quad P_2 = 1 \quad (\text{oder } P_2 = 0)$$

auf einer algebraischen Fläche. Alles ist mehr eine Wiederholung bekannter Sätze und Beweise von L. Godeaux (die vom Verf. zitiert werden), als eine neue Bearbeitung dieses Gegenstandes [s. L. Godeaux: C. R. Acad. Sci., Paris 156, 1306 (1913); Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, appartenant à certaines surfaces algébriques, Mons, 1913; Bull. Acad. Roy. Belg. (5) 12, 726—741, 890—902 (1926) und 13, 114—133 (1927)].

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Wong, B. C.:** On a certain rational  $V_n^{2n+1}$  in  $S_{2n+1}$ . Amer. J. Math. 56, 219 bis 224 (1934).

Untersuchung über die Projektionen einer besonderen  $V_n^{2n+1}$  eines Raumes  $S_{2n+1}$ , die von D. W. Babbage betrachtet worden ist (s. dies. Zbl. 2, 148). Solche Projektionen besitzen gewisse mehrfache Mannigfaltigkeiten; es werden hier ihre Ordnungen bestimmt, und auch die Ordnungen der Kuspidualmannigfaltigkeiten, die den Doppelmannigfaltigkeiten angehören. Die angewendete Methode läßt  $V_n^{2n+1}$  in  $2n+1$  Räume  $S_n$  zerfallen, die miteinander geeignete Lagenbeziehungen aufweisen; solche Räume  $S_n$  und ihre gegenseitigen Lagenbeziehungen werden mit  $2n+1$  Punkten und gewissen ihrer Verbindungsstrecken dargestellt; dieses Verfahren hat Verf. schon in anderen geometrischen Arbeiten abzählender Natur benutzt. *E. G. Togliatti.*

## Differentialgeometrie:

**Rossinski, Serge:** Sur une transformation des surfaces minima. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1108—1110 (1934).

Une surface minima ( $S$ ) se déforme en restant minima. L'auteur a montré (ce Zbl. 8, 176) qu'il existe  $\infty$  congruences isotropes ( $C$ ) dont les rayons sont invariablement liés aux plans tangents perpendiculaires de ( $S$ ) et qui se transforment en congruences isotropes au cours de la déformation mentionnée. Or l'enveloppée moyenne de ( $C$ ) est une surface minima ( $\Sigma$ ). L'auteur étudie la transformation de ( $S$ ) en ( $\Sigma$ ). Exemple: la transformation de la surface minima d'Enneper en surface minima de Henneberg. Quand ( $S$ ) se déforme, ( $\Sigma$ ) subit une transformation (en surface minima) qui n'est pas une déformation. *S. Finikoff* (Moscou).

**Rössler, Fred:** Beiträge zur affinen Flächentheorie. Lotos 81, 13—16 (1933).

Der erste Teil dieser kurzen Zusammenfassung behandelt ein affin-geometrisches Analogon der infinitesimalen Verbiegung einer Fläche. Der Hauptteil der Arbeit gilt Untersuchungen über Affin-Minimalflächen. Den Schluß bildet eine Zuordnung zwischen uneigentlichen Affin-Sphären und (metrischen) Minimalflächen. *W. Haack.*

**Griss, G. F. C.:** Die Differentialinvarianten eines Systems von  $n$  relativen kovarianten Vektoren in  $R_n$ . Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **37**, 82—87 (1934).

Ein relativer Vektor vom Gewichte  $r$  wird durch die Transformationsformel

$$\bar{a}_\alpha = a_\mu e_\alpha^\mu A^r \quad \text{mit} \quad A = |e_k^i|, \quad e_k^i = \partial x_i / \partial \bar{x}_k$$

definiert. Sind  $n$  linear-unabhängige relative Vektoren  $\overset{h}{a}_\alpha$  der Gewichte  $r_h$  gegeben und ist  $\sum r_h \neq -1$ , so kann man sie durch Multiplikation mit einer Potenz der Determinante  $a = |\overset{h}{a}_\alpha|$  in gewöhnliche Vektoren verwandeln, deren Differentialinvarianten bekannt sind. Ist aber  $\sum r_h = -1$ , so ist  $a$  eine absolute Invariante. Setzt man dann

$$\overset{h}{p}_{\alpha\beta} = \partial_\beta \overset{h}{a}_\alpha - \partial_\alpha \overset{h}{a}_\beta \quad \text{und} \quad s_\mu = \sum_h \overset{h}{p}_{\mu\nu} \overset{h}{a}^\nu / r_h (n-1),$$

wo  $\overset{h}{a}^\nu$  die Elemente der gespiegelten inversen Matrix zu  $(\overset{h}{a}_\mu)$  sind, sowie

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \sum_h (\partial_\nu \overset{h}{a}_\mu \overset{h}{a}^\lambda + r_h \overset{h}{a}_\mu \overset{h}{a}^\lambda s_\nu), \quad S_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda,$$

so gilt der Reduktionssatz: Die Differentialinvarianten 1. Ordnung der  $\overset{h}{a}_\alpha$  sind algebraische Invarianten von  $\overset{h}{a}_\alpha$ ,  $S_{\mu\nu}^\lambda$  und den mit  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  gebildeten kovarianten Ableitungen von  $\overset{h}{a}_\alpha$ . Man kann in diesem Satz die kovarianten Ableitungen der  $\overset{h}{a}_\alpha$  durch den Vektor  $v_\nu = \partial_\nu a$  und die  $S_{\mu\nu}^\lambda$  durch

$$\overset{h}{q}_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^\lambda \overset{h}{a}_\lambda = \overset{h}{p}_{\mu\nu} + r_h \overset{h}{a}_\mu s_\nu - r_h \overset{h}{a}_\nu s_\mu$$

ersetzen. Für die Invarianten 1. Ordnung wird eine algebraische Basis angegeben. Ein Adjunktionssystem 2. Ordnung wird von den kovarianten Ableitungen  $\overset{h}{q}_{\mu\nu}(\sigma)$  und  $v_\nu(\sigma)$  gebildet, da der Krümmungstensor sich durch diese ausdrücken läßt.

van der Waerden (Leipzig).

**Einstein, A., und W. Mayer:** Darstellung der Semi-Vektoren als gewöhnliche Vektoren von besonderem Differentiationscharakter. Ann. of Math., II. s. **35**, 104—110 (1934).

Es wird gezeigt, daß Semivektoren auch direkt auf das Gaußsche Koordinatensystem bezogen werden können.

V. Fock (Leningrad).

**Levy, Harry:** Curvatures in Riemannian space. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 75 bis 78 (1934).

The author gives for the case of a Riemannian manifold an exact proof of the property that the curvature is the derivative of the angle of contingency with respect to the arc and the analogous property for the  $(n-1)^t$  curvature.

Struik.

**Geymonat, L., e M. Zeuli:** Generalizzazione di alcuni concetti e formule di geometria differenziale delle varietà riemanniane. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **19**, 297 bis 301 (1934).

Aus den Affinoren  $P_i^\nu$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) kann man wieder Affinoren

$$P_\lambda^\nu = P_{i_1}^\nu P_{i_2}^{\lambda_1} \dots P_{i_{r-1}}^{\lambda_{r-2}} P_{i_r}^{\lambda_{r-1}}$$

aufbauen. Aus dieser Definition folgt sofort

$$P_\lambda^\nu = P_{i_1 \dots i_r}^\nu = 0.$$

Jeder Affinor  $P_i^\nu$  kann als ein Operator angesehen werden, der einem Vektor  $u^\nu$  einen anderen  $P_i^\nu u^\lambda$  zuordnet. Dasselbe gilt auch für die Affinoren  $P_\lambda^\nu$ . Schreibt man

$$\delta_i^\nu = P_i^\nu u^\lambda,$$

so haben die Operatoren  $\delta_{i_1 \dots i_r}$  analoge algebraische Struktur wie die Operatoren  $P_{i_1 \dots i_r}^\nu$ .

Hlavatý (Praha).



● **Hlavatý, Václav:** Les courbes de la variété générale à  $n$  dimensions. Mém. Sci. math. Fasc. 63, 73 S. (1934).

This book let deals with the theory of curves in a manifold of  $n$  dimensions carrying a linear connection. This has been for a considerable time a rather neglected field, though the late Guichard in No. XXIX of the same "Memorial"-series has shown how interesting the theory of curves in a euclidean space of  $n$  dimensions is. The author has shown, in a number of well-selected examples, how many possibilities exist for a fertile study of curves in more general connections. — After having introduced the principal conceptions connected with the theory of linear connections in a notation closely related to that of Schouten, the author takes up his study in a manifold with torsion and with a metric. He derives the formulas of Frenet, also for the case that the tangent vector field changes into an arbitrary vector field along the curve. Formulas of Frenet are also given for a Weyl connection and for a general connection with torsion. In this connection there are no unit vectors and no arc length, and it is necessary to introduce a new invariant belonging to the curve, and a new set of equations, both for contravariant and for covariant vectors, which remind of the Frenet equations. In a next chapter curves in Riemannian manifolds are investigated. The coordinates of the curve are developed in terms of their arc length, which is useful for the theory of contact. Some differences between the theory of curves in Riemannian manifolds and in euclidean spaces are pointed out. Then follow considerations on curves in manifolds imbedded in Riemannian manifolds, leading to generalizations of Enneper's and of Meusnier's theorem, and to quasi-asymptotic curves. A special discussion is devoted to infinitesimal deformation of a curve in a linear connection with metric and torsion, related to the investigations on the "écart géodésique", reopened in 1926 by Levi-Civita. Another chapter deals with the integration of the equation of the parallel displacement of a contravariant vector along a light ray in a four-dimensional Weyl connection, and the last chapter deals with the intrinsic equation of curves on surfaces in Riemannian manifolds of three dimensions. Several intrinsic equations are discussed, e. g. those of the geodesic circles, and of curves of surfaces with a simple type of umbilics. The author ends with a general rule to find the intrinsic equations of curves on such manifolds. A bibliography, containing eighty titles, of which many refer to papers by the author himself, and almost all dating from recent years, shows how much work has lately been done in this field. The author has collected the gist of these papers in a well written and very understandable little book.

*D. J. Struik* (Cambridge).

● **Gormley, P. G.:** A correspondence between null and ordinary geodesics. Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 1—9 (1934).

This paper discusses the case that two Riemannian manifolds  $V_n$  and  $V'_n$  can be mapped in such a way on each other that the  $\infty^{2n-3}$  null geodesics of  $V'_n$  pass in a system of  $\infty^{2n-3}$  geodesics of  $V_n$ . — Necessary and sufficient condition for this mapping is that the equation holds

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \lambda \end{matrix} \right\} + \delta_\mu^\nu \psi_\lambda + \delta_\lambda^\nu \psi_\mu + g_{\mu\lambda} \varphi^\nu \quad (\text{A})$$

where  $\psi_\lambda$ ,  $\varphi^\nu$  are arbitrary vectors, and  $g_{\lambda\mu}$ ,  $\delta_\mu^\nu$  are the fundamental tensor of the  $V_n$  and the unit tensor. The parameter along the null geodesic can be selected in such a way that it is a scalar multiple of the corresponding arc-length of the geodesic. The transformation of the curvature tensor is computed and from this is found that the necessary and sufficient condition that the null geodesics of a  $V_n$ ,  $n > 3$ , can be represented as linear functions of a parameter, is that the  $V_n$  be conformally euclidean. At the end is shown that condition (A) is reversible only when it represents either a conformal or a projective mapping.

*Struik* (Cambridge).

● **Hosokawa, Tōyomon:** Kinematic connections and their application to physics. Proc. Imp. Acad. Jap. 10, 49—52 (1934).

The author considers a projective differential geometry in the sense of the theory of linear connections, with basic group

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3, x^4). & i &= 1, 2, 3, 4 \\ \bar{x}^0 &= x^0. \end{aligned}$$

He calls these transformations kinematic transformations. Then he defines vectors and tensors under this group, shows, following Veblen and Schouten-van Dantzig, how a Riemannian geometry can be defined in this projective connection, and suggests unification of the theory of the gravitational field, of the electromagnetic field, and of the spinning electron.

*Struik* (Cambridge).

**Hosokawa, Tôyomon:** Über nicht-holonyme Übertragung in allgemeiner Mannigfaltigkeit  $T_n$ . J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I Math. 2, 1—11 (1934).

This paper discusses the theory of manifolds of  $m$  dimensions lying in a manifold of  $n$  dimensions with a connection in the Berwald-Finsler sense. In this case we connect with every point an oriented line element and define a linear displacement of the combination (point-line element). The induction process is made possible by the introduction of two "pseudonormal"  $(n - m)$ -vektors. The author shows how the Gauss equations are generalized and devotes particular attention to the conditions of holonomy. *Struik (Cambridge).*

**Gugino, E.:** Sul parallelismo definito con variazioni angolari. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 92, 663—676 (1933).

In a Riemannian manifold of  $n$  dimensions  $V_n$  a vector is moved parallel to itself in the sense of Levi-Civita. This paper studies the variation of the angles, which this vector makes with the coordinate hypersurfaces. The notation is that of Levi-Civita. *Struik (Cambridge).*

**Hlavatý, V.:** Connexion projective et déplacement projectif. Ann. Mat. pura appl. IV. s. 12, 217—294 (1934).

The projective connection is introduced by means of a scalar density  $e$  of weight  $-1$  which in the given coordinate system has the value 1. In the coordinate system  $\bar{x}$ ,  $\bar{e} = \Delta \bar{e}$ . But in  $\bar{x}$  there is the same kind of density  $\bar{E}$  so that  $E = \Delta^{-1} \bar{E}$  that is  $E = \Delta^{-1} e$ . If  $x^0 = \log e^{-\frac{1}{n+1}}$  then  $\bar{x}^0 = x^0 - \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}$  so that the "extra variable"  $x^0$  is introduced by means of a scalar density. There are then two groups of trans-

formations to be considered:  $P \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n)$ ,  $\bar{x}^0 = x^0 - \log \Delta^{\frac{1}{n+1}}$  and the group  $FX^i = x^i$ ,  $X^0 = x^0 + f(x^1 \dots x^n)$ . A projective vector is then defined as a set of  $n + 1$  functions obeying the usual law of transformation and from the notion of parallel displacement the projective connection is derived. The same results have been obtained by T. Y. Thomas [Math. Z. 25, 123—133 (1926)] but  $x^0$  was treated as the  $(n + 1)^{\text{th}}$  coordinate of an affine space and by Veblen [J. London Math. Soc. 4, 140 to 160 (1929)] where  $x^0$  was treated as a "gauge". — As applications of this theory, the projective parameter of a curve is considered and the successive projective curvatures are defined in a manner entirely analogous to affine curvatures. This notion of curvature is then applied to spaces of 2 and 3 dimensions. The paper is concluded by obtaining the projective connection induced in a subspace and the derivations of the analogues of the equations of Gauss, Codazzi and Kuehne. *M. S. Knebelman.*

**Minetti, Silvio:** Sur le concept de coordonnées homogènes dans la géométrie des holospaces. Bull. Sci. math., II. s. 58, 112—117 (1934).

Im Raume aller stetigen eindeutigen und ableitungsfähigen Funktionen (für  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) soll eine jede solche Funktion  $x = x(\alpha)$  einen Punkt darstellen, während die verschiedenen Werte von  $x(\alpha)$  für  $0 \leq \alpha \leq 1$  die Koordinaten dieses Punktes darstellen. Der Verf. führt außerdem die homogenen Koordinaten  $X(\alpha)$ ,  $T = \text{konst.}$  mittels der Gleichungen

$$x(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{T}, \quad \varphi(\alpha) = T$$

ein und zeigt, daß diese Einführung eine zweckmäßige ist.

*Hlavatý (Praha).*

### **Topologie:**

**Noack, Albert:** Die einseitige Lagerung orientierbarer Flächen. Math. Ann. 109, 681—684 (1934).

Es werden 2 Beispiele für die bekannte Erscheinung angegeben, daß eine orientierbare Fläche einseitig in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit liegen kann. Im ersten Beispiel handelt es sich freilich um eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit einem singulären Punkt.

*Seifert (Dresden).*



**Magnus, Wilhelm:** Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen. *Math. Ann.* **109**, 617—646 (1934).

Die Abbildungsklassengruppe der  $n$ -mal gelochten Kugel und die des  $n$ -mal gelochten Torus wird durch Angabe je eines Systems von Erzeugenden und definierenden Relationen bestimmt. Die erstere dieser beiden Gruppen,  $\mathfrak{A}_n$ , steht mit der Gruppe  $\mathfrak{Z}_n$  der Artinschen Zöpfe aus  $n$  Fäden in einem engen Zusammenhang.  $\mathfrak{Z}_n$  ist zu  $\mathfrak{A}_n$  mehrstufig isomorph, und zwar entsteht aus  $\mathfrak{Z}_n$  eine zu  $\mathfrak{A}_n$  einstufig isomorphe Gruppe, wenn man die Zopfdeformationen noch um die folgende Abänderung erweitert: es werde an die ersten  $k$  Fäden ein einfacher Toruszopf und an die restlichen  $n - k$  Fäden ein einfacher entgegengesetzt verdrehter Toruszopf angehängt. Dieser Zusammenhang läßt sich einerseits gruppentheoretisch und andererseits unmittelbar durch Konstruktion von Zöpfen aus geeigneten Kugelabbildungen herstellen. Gleichzeitig ergibt sich eine neue Darstellung von  $\mathfrak{Z}_n$  durch Automorphismen der freien Gruppe von  $n - 1$  Erzeugenden und eine gruppentheoretische Herleitung für die Relationen von  $\mathfrak{Z}_n$ , die Artin durch topologische Überlegungen bestimmt hatte. *Reidemeister* (Königsberg).

**Goeritz, Lebrecht:** Die Bettischen Zahlen der zyklischen Überlagerungsräume der Knotenaußenräume. *Amer. J. Math.* **56**, 194—198 (1934).

Nach O. Zariski ist bei einem Schlauchknoten die Bettische Zahl  $b_h$  der  $h$ -fachen zyklischen Überlagerung seines Knotenaußenraumes gleich der Anzahl  $a_h$  der Wurzeln, welche das  $L$ -Polynom des Knotens mit der  $h$ -ten Kreisteilungsgleichung gemeinsam hat. Verf. zeigt nun auf einfache Weise: bei jedem Knoten ist  $b_h$  kleiner oder gleich  $a_h$  und größer oder gleich der Anzahl  $a'_h$  der verschiedenen Wurzeln der genannten Art; bei Schlauchknoten ist  $a_h = a'_h$  und daher  $a_h = b_h$ . *Reidemeister* (Königsberg).

**Götz, Witburg:** Über Stetigkeit und Zusammenhang im kleinen. *Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 9*, 89—90 (1934).

**Kirszbraun, M. D.:** Über die zusammenziehenden und Lipschitzschen Transformationen. *Fundam. Math.* **22**, 77—108 (1934).

Eine Transformation  $f$ , welche einen metrischen Raum  $A$  auf einen metrischen Raum  $B$  abbildet, heißt eine zusammenziehende Transformation, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:  $\varrho(f(x), f(y)) \leq \varrho(x, y)$ . Sind  $A$  und  $B$  Untermengen eines euklidischen  $R^n$ , so beweist Verf., daß die Abbildung  $f$  sich von der Menge  $A$  mit Beibehaltung der Zusammenziehungseigenschaft auf den ganzen Raum  $R^n$  erweitern läßt. In dem Beweis dieses Satzes liegt das Hauptgewicht der Arbeit; weitere Sätze sind einfache Folgerungen dieses Hauptsatzes. Der Beweis beruht auf dem folgenden elementargeometrischen Lemma: Es seien in  $R^n$  zwei Systeme von je  $n + 1$  Punkten gegeben, wobei das zweite System eine Zusammenziehung des ersten bildet. Für einen beliebigen Punkt  $p$  gibt es dann einen Punkt  $q$ , welcher von jedem Punkte des zweiten Systems nicht weiter entfernt liegt, als  $p$  von dem entsprechenden Punkte des ersten.

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Kerékjártó, B. de:** Sur les similitudes de l'espace. *C. R. Acad. Sci., Paris* **198**, 1345—1347 (1934).

Es sei  $t$  eine topologische, die Orientierung erhaltende Selbstabbildung einer offenen  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.  $t$  besitze einen isolierten Fixpunkt  $V$ , und für jeden Punkt  $P$ , der nicht Fixpunkt ist, sei die Folge der sukzessiven Bilder  $t(P)$ ,  $t^2(P)$ , ... divergent. Dann ist  $t$  einer Ähnlichkeitstransformation des euklidischen Raumes äquivalent in folgendem Sinne: 1. Die Bilder  $t^{-1}(P)$ ,  $t^{-2}(P)$ , ... eines beliebigen Punktes streben nach  $V$ , der dann der einzige Fixpunkt von  $t$  ist. 2. Es gibt eine Folge von geschlossenen Flächen  $\dots S_{-n}, \dots S_0, \dots S_n, \dots$ , so daß  $S_n$  bei  $t$  in  $S_{n+1}$  übergeht, daß  $S_n$  im Inneren von  $S_{n+1}$  liegt und daß  $S_{-1}, S_{-2}, \dots$  nach  $V$  streben, während die Folge  $S_1, S_2, \dots$  divergent ist. Als Anwendung wird mit Hilfe von Sätzen von M. H. A. Newman bewiesen, daß in einer kommutativen kontinuierlichen  $n$ -gliedrigen Gruppe, deren Parameterraum offen und einfach zusammenhängend

ist, die sukzessiven Wurzeln  $T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{3}}, T^{\frac{1}{4}}, \dots$  einer beliebigen Transformation  $T$  nach der Identität streben. H. Seifert (Dresden).

**Rédei, László: Zu einem geometrischen Satz von K. Borsuk.** Mat. fiz. Lap. 41, 36—40 u. dtsh. Zusammenfassung 40 (1934) [Ungarisch].

Es gilt der folgende Satz (Borsuk, dies. Zbl. 6, 424): Bei jeder Zerlegung einer  $n$ -dimensionalen euklidischen Vollkugel (mit dem Mittelpunkt  $M$ ) in  $n$  Mengen enthält mindestens eine von diesen Mengen (in bezug auf  $M$ ) gegenüberliegende Punkte. Verf. beweist diesen Satz für den Fall  $n = 3$  elementar. Es wird mit Hilfe des Heine-Borel'schen Überdeckungssatzes zuerst folgendes bewiesen: Gälte der allgemeine Satz nicht, so ließe sich die Oberfläche eines  $n$ -dimensionalen Würfels mit dem Mittelpunkt  $M$  geeignetweise so in kongruente  $(n - 1)$ -dimensionale Würfel zerlegen und all diese so in  $n$  Mengen vereinigen, daß keine dieser Mengen in bezug auf  $M$  gegenüberliegende Punkte enthält. Die Unmöglichkeit dieser Aufgabe stellt sich im Falle  $n = 3$  leicht heraus (vgl. auch Wolff und Denjoy, dies. Zbl. 8, 181). Sz. Nagy (Szeged).

**Veress, Pál: Über abstrakte Räume.** Mat. fiz. Lap. 41, 17—34 u. dtsh. Zusammenfassung 34—35 (1934) [Ungarisch].

Nach einer Einleitung über den Begriff der abstrakten Räume wird folgender Satz bewiesen: Es sei  $A_1(e), A_2(e), \dots$  eine Folge von Aussagen über die Elemente  $e$  einer beliebigen Menge  $E$ . Gibt es 1. zu jedem Elemente  $e$  von  $E$  eine Aussage der Folge, die für dieses Element gültig ist, 2. zu jeder unendlichen Teilmenge  $E'$  von  $E$  eine Aussage der Folge, die für unendlichviele Elemente von  $E$  gültig ist, dann gibt es in der Folge endlichviele Aussagen  $A_1(e), A_2(e), \dots, A_N(e)$ , so daß für jedes Element der Menge  $E$  schon eine von diesen endlichvielen Aussagen gültig ist. — Es werden einige Anwendungen dieses Satzes auf topologische und metrische Räume und in solchen Räumen erklärte, stetige Funktionen gemacht. Sz. Nagy (Szeged).

## Relativitätstheorie.

● **Einstein, Albert: La géométrie de l'expérience.** 2. édit. Paris: Gauthier-Villars 1934. 24 S. Frs. 4.—.

**Radojčić, M.: Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Relativitätstheorie.** Publ. Math. Univ. Belgrade 2, 106—149 (1933).

In den üblichen axiomatischen Begründungen der Relativitätstheorie werden eine Reihe von geometrischen Elementen als gegeben vorausgesetzt. Verf. stellt sich zur Aufgabe, einen axiomatischen Aufbau durchzuführen, der allein auf elementare Erfahrungstatsachen der Physik gegründet ist, ohne irgendwelche stetige Raum- und Zeitbegriffe zu postulieren. In der vorliegenden Arbeit werden die „vormetrischen“ Axiome behandelt. Zu den Begriffen der reinen Mathematik kommen fünf neue Grundbegriffe hinzu, die durch die Worte: „materielle Punkte, augenblickliche Ereignisse, erscheinen, stattfinden, früher“ gekennzeichnet sind. Die Beziehungen zwischen den Grundelementen werden durch zwölf Axiome hergestellt, die in sechs Gruppen geteilt erscheinen: die Axiome des Erscheinens, der zeitlichen Anordnung, des Anknüpfens, der Homogenität und der Stetigkeit. Lanczos (Lafayette).

**Lalan, V.: Sur une définition axiomatique de l'impulsion et de l'énergie.** C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1211—1213 (1934).

Axiom: If two material systems have the same momentum and the same energy relative to one inertial system of reference, they have the same momentum and the same energy relative to all inertial systems.—Starting from this, and the assumption that the momentum and energy of a particle of invariant mass  $m_0$  and velocity  $v$  (relative to a given inertial system) are of the form  $m_0 v g(v^2)$  and  $m_0 f(v^2)$  respectively, the author obtains by use of the Lorentz Transformation two functional equations for  $f$  and  $g$ . The solution of these yields the well known special relativity formulae for energy and momentum. H. S. Ruse (Princeton).



**Burgatti, P.: Lo spostamento dei perielii nella teoria della relatività con riguardo allo schiacciamento solare.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 199—205 (1934).

The values for the advance of the perihelia of Mercury and the other planets deduced from general relativity are obtained on the hypothesis of the perfect spherical symmetry of the gravitational field of the sun. In this paper the author seeks a formula for the advance of the perihelion of a planet, based on general relativity, which takes into account the spheroidal symmetry of the sun. For this purpose he uses Levi-Civita's theorem that the trajectories of an Einsteinian motion coincide to a second approximation with those of a Newtonian motion in ordinary Euclidean space, corresponding to the same total energy  $E$  and to forces derived from the potential

$$U_1 = (1 + 4E/c^2)U + 3U^2/c^2,$$

$U$  being the classical (Newtonian) potential of the field. From this he obtains the approximate formula  $s = 2\pi \left\{ 3 \frac{a_0}{a} + 2165 \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \varepsilon \right\} 10^{-8}$  for the advance of the perihelion of a planet in one revolution. Here  $a_0$  is the mean radius of the earth's orbit,  $a$  is that of the planet in question and  $\varepsilon$  is the oblateness of the sun. The first term ( $6 \cdot 10^{-8} \pi a_0/a$ ) is that obtainable from general relativity on the hypothesis of a spherically symmetric field, and gives, in the case of Mercury, the well-known correction of  $42''$  to the centennial motion of perihelion. The second term is double the value obtainable from classical mechanics for the advance of perihelion due to the sun's oblateness. Evidently quite a small value of  $\varepsilon$  will introduce an appreciable change in the theoretical value obtained from relativity for the advance of perihelion.

*H. S. Ruse (Princeton).*

**Mira Fernandes, A. de: La teoria unitaria dello spazio fisico e le equazioni relativiste della meccanica atomica.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 314—318 (1934).

Levi-Civita (dies. Zbl. 6, 271) hatte versucht, die Diracschen Gleichungen (mit Gravitationsfeld) durch ein System von vier Gleichungen zweiter Ordnung für einen Vierervektor zu ersetzen. — Verf. weist nun darauf hin, daß ein von ihm [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15 (1932); dies. Zbl. 4, 424] als Ausgangspunkt einer einheitlichen Feldtheorie angenommener linearer Zusammenhang mit dem Levi-Civitaschen Gleichungssystem im Einklang steht. (Die Ersetzung der Diracschen Gleichungen durch die von Levi-Civita vorgeschlagenen führt zu ernsthaften physikalischen Schwierigkeiten. Ref.) *Guth (Wien).*

**Tolman, Richard C.: Effect of inhomogeneity on cosmological models.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 169—176 (1934).

In this paper are considered simple cosmological models composed of dust particles (nebulae) exerting negligible pressure, which are distributed non-uniformly but with spherical symmetry about a particular origin. The line-element of such a model is of the form  $ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\omega (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2$ , where  $\lambda$  and  $\omega$  are functions of  $r$  and  $t$ . The energy-momentum tensor is  $T^{\alpha\beta} = \varrho \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}$ , where  $\varrho$  is the proper-density of the dust, and has all its components zero except  $T_4^4 = \varrho$ . Hence are obtained partial differential equations for  $\lambda$ ,  $\omega$ ,  $\varrho$  from which the value of  $\lambda$  in terms of  $\omega$  is at once deduced. — The last section is devoted to applications. The author obtains: (a) The static Einstein model by choosing the initial distribution  $e^\omega = r^2$ ,  $\dot{\omega} = 0 = \ddot{\omega}$ , where dots denote differentiation with respect to  $t$ ; (b) A distorted Einstein model corresponding to the initial values  $e^\omega = r^2$ ,  $\dot{\omega} = 0$ ,  $\ddot{\omega} = \text{function of } r$ . The initial behaviour of this model is such as to accentuate the existing differences between it and the Einstein model (a), showing that the latter has a type of instability additional to that already discussed by Eddington; (c) The non-static Friedmann model  $ds^2 = dt^2 - e^{\varrho(t)} dl^2$  corresponding to the initial values  $e^\omega = r^2 e^{\varrho(0)}$ ,  $\dot{\omega} = \dot{\varrho}(0)$ ,  $\ddot{\omega} = \ddot{\varrho}(0)$ ; (d) A distorted Friedmann model for which initially  $e^\omega = r^2 e^{\varrho(0)}$ ,  $\dot{\omega} = \dot{\varrho}(0)$ ,  $\ddot{\omega} = \text{function of } r$ . There is an initial tendency for the differences between this model and (c) to

be emphasized; (e) A combination of uniform distributions in which the dust is distributed in Friedmann zones  $0 \leq r \leq r_a$ ,  $r_b \leq r \leq r_c$ , ..., separated from one another by transition zones. Each zone behaves individually as though it were part of a completely homogeneous Friedmann model. — The general conclusion of the paper is that there is no kind of gravitational action which would necessarily lead to the disappearance of inhomogeneities in cosmological models, and that caution is needed in applying to the actual universe any wide extrapolations of results deduced from strictly homogeneous models.

H. S. Ruse (Princeton).

**Chatterjee, N. K.: Note on the expansion of the Einstein universe by condensation.** Bull. Calcutta Math. Soc. 25, 135—138 (1934).

Im Anschluß an eine Arbeit von Sen [Proc. Royal Soc. A 140, 269 (1933); dies. Zbl. 6, 377] werden Rechnungen von Ghosh [Proc. Edinburgh Math. Soc. 44, 72 (1925—1926)] benutzt, um aus Überlegungen an einem statischen, inhomogenen, kugelsymmetrischen Modell Aufschluß zu erhalten über die Frage, ob die Bildung von Kondensationen in einem Einsteinschen Universum zur Expansion führt. Heckmann.

**Milne, E. A.: A Newtonian expanding universe.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 64—72 (1934).

**McCrea, W. H., and E. A. Milne: Newtonian universes and the curvature of space.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 5, 73—80 (1934).

Durch die beiden Arbeiten wird erneut die alte Frage nach der Anwendbarkeit der Newtonschen Gravitationstheorie auf homogen und isotrop mit Materie erfüllte euklidische Räume aufgerollt. — Relativ zu einem Beobachter im Ursprung eines Systems von Polarkoordinaten ströme die Materie nur in radialer Richtung. Die Autoren setzen dann an 1. die Bewegungsgleichung der Materie

$$\frac{Dv}{Dt} = -G \frac{M(r)}{r^2}, \quad (1)$$

wo links die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit eines Materieelementes steht und rechts ( $G$  = Gravitationskonstante) die Kraft, die auf dieses in der Entfernung  $r$  gedachte Element ausgeübt wird von aller Materie innerhalb einer Kugel vom Radius  $r$  um den Beobachter. Die Wirkung aller übrigen Massen außerhalb dieser Kugel wird gleich Null gesetzt. 2. Wird benutzt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0. \quad (2)$$

Der Forderung der homogenen Materieverteilung wird genügt durch den Ansatz  $\partial \varrho / \partial r = 0$ , so daß  $\varrho$  nur von  $t$  abhängt. Aus der Integration von (1) und (2) werden dann Gleichungen gewonnen, die formal identisch sind mit den Gleichungen der relativistischen Theorie des „Expanding Universe“. Und zwar entsprechen die Fälle des hyperbolischen, euklidischen und elliptischen Raumes den Fällen, wo die Konstante im Energieintegral der Bewegungsgleichungen (1)  $\geq 0$  ist. Das  $\lambda$ -Glied kann man auch noch bekommen, wenn man zwischen den Materiepartikeln nicht allein die Newtonsche Anziehung, sondern noch eine der Entfernung proportionale Kraft herrschen läßt. Milne glaubt aus der Korrespondenz beider Formalismen schließen zu dürfen, daß man um das Jahr 1750 etwa (hätte man noch das Dopplersche Prinzip besessen) die dynamische Theorie der Expansion der Welt auf der Basis der Newtonschen Theorie hätte geben können. Dazu ist jedoch zu bemerken, daß die rechte Seite von (1) innerhalb des Rahmens der Newtonschen Theorie nicht zwangsläufig erhalten werden kann. Vielmehr hängt der Wert des Potentials in einem Punkte bei der angenommenen Materieverteilung völlig ab von der Art des Grenzübergangs, der den Einfluß der  $\infty$  fernen Massen auf diesen Punkt liefert. — Die Autoren wählen den Grenzübergang so, daß die formale Korrespondenz zur relativistischen Kosmogonie herauskommt. Hätten sie aber irgendeinen anderen Grenzübergang gewählt, der innerhalb der Newtonschen Gravitationstheorie ebenso möglich ist, so hätte die Korrespondenz sich nicht einstellen



können. Topologisch sind beide Theorien natürlich nicht völlig äquivalent, weil z. B. der Geschlossenheit des Raumes positiver Krümmung stets der offene euklidische Raum im anderen Falle gegenübertritt. Der wesentliche Gehalt der beiden Arbeiten scheint dem Ref. zu bestehen in der erneuten Verifizierung einer allgemeinen Möglichkeit am vorliegenden speziellen Problem: Daß man nämlich metrische Aussagen der allgem. R. Th. in dynamische der Newtonschen Mechanik übersetzen kann.

*Heckmann (Göttingen).*

## Quantentheorie.

● **Arena, Matteo:** *La teoria dei quanti e le moderne teorie quantistiche.* Catania: F.<sup>III</sup> Viaggio Campo 1933. VIII, 130 S.

● **Rast, Karl:** *Atomtheorie und Atombau.* Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1934. 138 S. u. 28 Abb. RM. 6.60.

**Zalcoff, R.:** *Sur la forme tensorielle de la mécanique ondulatoire.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1393—1394 (1934).

**Scherzer, O.:** *Zum relativistischen Zweikörperproblem.* Z. Physik 83, 277—283 (1933).

Møller (dies. Zbl. 5, 137) stellte für die relativistisch-retardierte Wechselwirkung zweier Elektronen korrespondenzmäßig ein Matricelement auf. — Verf. konstruiert eine Wellengleichung, in der dem Möllerschen Matricelement ein Operator unendlich hoher Ordnung entspricht. Retardiert man die Coulombsche Wechselwirkung bloß in erster Näherung, die magnetische hingegen überhaupt nicht, so reduziert sich diese Wellengleichung auf eine von Breit angegebene [Physic. Rev. 34, 553 (1932)] (wie zu erwarten war); vgl. zu dieser Arbeit auch Nikolsky (vgl. nachst. Referat). *Guth.*

**Nikolsky, K.:** *Sur l'interaction relativiste quantique.* C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1013—1015 (1934).

Aus dem klassischen Ausdruck für die relativistische (retardierte) Wechselwirkung zweier Elektronen wird der korrespondierende quantentheoretische Ausdruck unter Verwendung der Diracschen Methode der (Poissonschen) Klammern ermittelt. Von Dämpfungstermen abgesehen, erhält Verf. einen von Scherzer (vgl. vorst. Referat) angegebenen Ausdruck, der die Breitschen [Physic. Rev. 34, 553 (1929)] bzw. Möllerschen (dies. Zbl. 5, 137) Formeln enthält. *Guth (Wien).*

**Swann, W. F. G.:** *The representation of radiation reaction in wave mechanics.* J. Franklin Inst. 217, 59—71 (1934).

Um den Einfluß der Rückwirkung der Strahlung auf die Ionisierung durch schnelle Elektronen beurteilen zu können, versucht Verf. den Einbau von die Strahlungsreaktion repräsentierenden Termen in die (skalare) Wellengleichung für ein Elektron. Nach einem bekannten Theorem von Ehrenfest [Z. Physik 45, 455 (1927)]; auf den Fall der gleichzeitigen Anwesenheit eines elektrischen und eines magnetischen Feldes ausgedehnt von Kennard (dies. Zbl. 1, 37)], bewegt sich der Schwerpunkt einer Gruppe von Wellen, für die die Schrödingergleichung gilt, gemäß den klassischen Gleichungen. (Das Theorem gilt für die Diracschen Gleichungen wegen der „Zitterbewegung“ nicht exakt. Ref.) Verf. diskutiert nun eine Methode, wie man von einer gewöhnlichen (skalaren) zu einer neuen Wellengleichung gelangen kann, die für die Schwerpunktsbewegung eines Wellenpakets die klassischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Strahlungsreaktion zur Folge hat. *Guth (Wien).*

**Anderson, Carl D.:** *Das Positron.* Naturwiss. 22, 293—296 (1934).

**Tamm, I., und S. Altschuler:** *Das magnetische Moment des Neutrons.* C. R. Acad. Sci. URSS 1, 455—458 u. dtsch. Text 458—460 (1934) [Russisch].

Landé hatte versucht, die bekannten Regeln des Vektormodells auf solche Kerne anzuwenden, in denen nur ein Proton für das magnetische und das mechanische Moment verantwortlich ist. Hieraus ließ sich ein plausibler Wert für das magnetische Protonenmoment ableiten. Verff. versuchen das gleiche für das magnetische Moment

des Neutrons. Man kommt jedoch hier nicht mit der Annahme aus, daß in den Kernen ohne freie Protonen nur ein Neutron einen Beitrag zum Moment gibt, und infolgedessen werden die Zuordnungen von Drehimpulsquantenzahlen zu den einzelnen Kernen mehrdeutig. Aus der Diskussion des Materials scheint jedoch ziemlich sicher zu folgen, daß der  $g$ -Faktor des Neutrons negativ ist. Für seinen Wert geben die Verff. —1 als plausibel an.

R. Peierls (Manchester).

**Bethe, H., and R. Peierls:** The „neutrino“. *Nature* **133**, 532 (1934).

Aus der Neutrino-Hypothese und aus der Existenz der (von Curie und Joliot entdeckten) positiven  $\beta$ -Aktivität wird gefolgert, daß zwei isobare Kerne mit der Ladungsdifferenz 1 nur dann beide stabil sein können, wenn die Differenz ihrer Massen kleiner ist als die Summe der Massen von Elektron und Neutrino. Ferner wird mit Hilfe einer Dimensionsbetrachtung gezeigt, daß der Umkehrprozeß der  $\beta$ -Emission, der auftreten muß, wenn man Kerne mit Neutrinos beschießt, sehr selten vorkommt und deshalb praktisch unbeobachtbar ist.

E. Teller (Kopenhagen).

**Schüler, H.:** Über die Darstellung der Kernmomente der Atome durch Kernvektoren. *Z. Physik* **88**, 323—335 (1934).

Es wird untersucht, inwiefern die bisher bekannten magnetischen Momente der Atomkerne sich vektoriell aus Elementarmomenten zusammensetzen lassen. Dabei werden die Elemente in zwei Klassen verteilt: solche, deren Kerne man sich aus  $\alpha$ -Teilchen, einer geraden Zahl von Neutronen und einem Proton, und solche, deren Kerne man sich aus  $\alpha$ -Teilchen und einer ungeraden Zahl von Neutronen aufgebaut denken kann. Es werden drei mechanische Momentvektoren angenommen, von denen der erste dem Kernrumpf, bestehend aus  $\alpha$ -Teilchen und einer geraden Zahl von Neutronen, der zweite einem evtl. überschüssigen Neutron, der dritte einem evtl. überschüssigen Proton entspricht. Unter der Voraussetzung, daß der Kernrumpf unmagnetisch ist, und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die  $g$ -Faktoren für den Neutronenumlauf 0, für den Protonenumlauf 1, und nach Stern für den Protonenspin 4 bis 5 betragen, erhält man Übereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man dem Neutronenspin den  $g$ -Wert — 3,3 zuschreibt.

R. de L. Kronig (Groningen).

**Wick, G. C.:** Sugli elementi radioattivi di F. Joliot e I. Curie. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **19**, 319—324 (1934).

Die von Fermi vorgeschlagene Theorie des  $\beta$ -Zerfalls wird auf die von Curie und Joliot entdeckten künstlichen radioaktiven Elemente und die von ihnen emittierten positiven Elektronen angewandt. Das Energiespektrum dieser Elektronen und die Zerfallskonstante in Abhängigkeit von der Energie werden berechnet. Die letztere stimmt nicht sehr genau mit dem experimentellen Material überein, doch liegt die Abweichung innerhalb der bisher sehr großen Versuchsfehler.

R. Peierls.

**Davydov, B.:** Über die Rekombinationswahrscheinlichkeit freier Atomkerne. *Physik. Z. Sowjetunion* **5**, 432—434 (1934).

Man kann wellenmechanisch die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß ein Elektron beim Vorübergange an einem Atomkern mit Coulombschem Felde unter Ausstrahlung in einer stationären Bahn eingefangen wird. Die gesamte Rekombinationswahrscheinlichkeit wäre die Summe für alle möglichen Bahnen. Die Rechnung ist für Grenzfälle von verschiedenen Autoren ausgeführt; die Summation ist aber wegen mathematischer Schwierigkeiten nicht möglich. Verf. bemerkt, daß die Formel der alten, halbklassischen Theorie von Kramers [*Philos. Mag.* **46**, 836 (1923)] im Bereiche  $E$  (Elektronenenergie)  $\leq V_i$  (Ionisierungsarbeit) auch für kleine Hauptquantenzahl noch unerwartet gut (bis auf einige Prozent) mit den Formeln des Referenten [*Ann. Physik* (5) **5**, 611 (1930)] übereinstimmt und nimmt das zum Anlaß, nach der Kramersschen Theorie den gesamten Rekombinationsquerschnitt zu berechnen:

$$\sigma = \frac{2^3}{3\sqrt{3}} \frac{e^2 h}{m^2 c^3} \frac{V_i}{E} \left[ \frac{1}{1 + \frac{E}{V_i}} + \log\left(1 + \frac{V_i}{E}\right) \right].$$

Wessel (Jena).



**Vleck, J. H. van:** The Dirac vector model in complex spectra. *Physic. Rev.*, II. s. 45, 405—419 (1934).

Wie Dirac gezeigt hat, ist das Säkularproblem bei Berücksichtigung des Pauliprinzipis einem Eigenwertproblem äquivalent, welches entsteht, wenn man formal die Kopplung zwischen den Spins einzelner Elektronen einführt. Auf Grund dieses „Diracschen Vektormodells“ wird vom Verf. eine Methode ausgearbeitet, welche dann auf verschiedene spezielle Probleme der Theorie der Spektren von Atomen und Molekülen angewandt wird. Die Methode operiert im wesentlichen mit Spinmatrizen und vermeidet eine explizite Einführung der Wellenfunktionen in Slaterscher Determinantenform. Sie bildet eine Ergänzung zur bekannten Slaterschen Methode, ist anschaulicher und (in Fällen, wo sie anwendbar ist) leichter zu handhaben als diese.

*V. Fock* (Leningrad).

● **Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik.** Hrsg. v. A. Eucken u. K. L. Wolf. Bd. 9. Die Spektren. Entstehung und Zusammenhang mit der Struktur der Materie. Abschnitt 1. — **Kuhn, H.:** Atomspektren. Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1934. VI, 266 S. u. 78 Fig. RM. 24.50.

Nach Schilderung der spektroskopischen Methoden und der empirischen Gesetzmäßigkeiten der Atomspektren führt ein kurzer Abschnitt in die korrespondenzmäßige Bohrsche Theorie der stationären Zustände und der Strahlung der Atome und in die Behandlung auf Grund der Schrödingergleichung ein. Den Hauptteil bildet eine Darstellung der einzelnen optischen Spektren und Röntgenspektren, mit Einschluß des Verhaltens im magnetischen und elektrischen Feld. Der letzte Abschnitt ist der Feinstruktur der Linien und der Linienbreite gewidmet. Wichtig ist noch eine Übersicht der neuesten Literatur und Tabellen der Röntgenterme, der Grundterme der einfachen Spektren und der magnetischen Momente der Kerne. *F. Hund* (Leipzig).

**Kohlrausch, K. W. F.:** Smekal-Raman-Effekt und Molekülstruktur. *Naturwiss.* 22, 161—169, 181—189 u. 196—204 (1934).

An Hand eines großen experimentellen Materials aus dem Gebiet der organischen Verbindungen berichtet der Verf. über den heutigen Stand der Zuordnung der Ramanspektren zu den Schwingungsformen der Moleküle und über die Möglichkeit, daraus auf feinere Züge der Molekülstruktur zu schließen. — Es wird zunächst eine qualitative Methode besprochen, bei der die Strukturformeln der Chemie entlehnt werden und eine Klassifizierung der Schwingungen empirisch durch eine systematische Variierung der Verbindungen erfolgt. So gelangt man zu der Unterscheidung von „inneren Gruppenschwingungen“, die vom „Molekülrest“ weitgehend unbeeinflusst bleiben (wie z. B. die Linie  $2570\text{ cm}^{-1}$  der SH-Gruppe) und von „äußeren Schwingungen“, wobei die einzelnen Gruppen als einheitliche Massen aufzufassen sind. — Eine einfache modellmäßige Vorstellung führt zur Unterscheidung von Valenz- und Deformationsschwingungen. Diese Klassifikation reicht aus, um die Zuordnung der Frequenzen in großen Zügen durchzuführen und eine Anzahl chemischer Tatsachen modellmäßig zu verstehen. Die Methode führt aber über die Chemie hinaus, wie etwa bei der Verfolgung von chemisch nicht trennbaren räumlichen Formen von „frei drehbaren Molekülen mit Einfachbindung“, z. B. Propylchlorid ( $\text{Cl} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH}_3$ ), wobei das Vorhandensein einer „Zickzack“- und einer „Wannenform“ aus der Verdoppelung der der C—Cl-Valenzschwingung entsprechenden Linie festzustellen ist, oder bei der Behandlung der von der Chemie noch ungelöster Benzolstruktur, wobei durch eine Reihe von Analogieschlüssen die Kekulé-Form mit den alternierenden Einfach- und Doppelbindungen wahrscheinlich gemacht wird. — Ein genaueres Eingehen auf den Mechanismus der Ramanstreuung macht die Zuhilfenahme der Chemie überflüssig. Es wird die Zahl und der Intensitäts- und Polarisationszustand der Ramanlinien mit den Symmetrieeigenschaften des Moleküls in Zusammenhang gebracht. Der Verf. deutet kurz an, wie sich die so ergebenden Auswahl- und Polarisationsregeln zusammen mit denen für das ultrarote Spektrum oft eine eindeutige Zuordnung möglich machen und so die Annahme einer bestimmten Symmetrie für das Molekül fordern. So ist z. B. für das Benzol die 6-zählige Symmetrie mit den Spektren unvereinbar, und es muß eine 3-zählige angenommen werden. — Schließlich werden die Methoden besprochen, mit denen aus der Frequenzhöhe der Ramanlinien Moleküleigenschaften (Kraftverhältnisse und räumliche Konfiguration) ermittelt werden können. Bei zweiatomigen Molekülen kann aus der einfachen Annahme der quasi-elastischen Bindung die „Federkraft“ berechnet werden, die vereinigt mit thermochemischen Messungen zu deren wesentlicher Verfeinerung benutzt werden kann. — Bei mehratomigen Molekülen entsteht die Schwierigkeit, daß man z. T. willkürliche Annahmen über die Kräfte



einführen muß, die den Valenzwinkel erhalten. Es wird an einigen Beispielen gezeigt, daß durch die konsequente Durchführung von ganz einfachen Annahmen die empirisch gefundenen Frequenzen so gut anzunähern sind, daß den Abweichungen vermutlich durch Korrekturen in den Grundannahmen Rechnung getragen werden kann. *Tisza* (Budapest).

**Halpern, Otto, and Philipp Gross:** On the statistical „interaction between ions and molecules“ in media of small dielectric constant. *J. chem. Phys.* 2, 184—187 (1934).

Die Debyesche Theorie des Aussalzeffektes neutraler Moleküle durch Elektrolyte führt diesen auf eine infolge der verschiedenen Dielektrizitätskonstanten von Lösungsmittel und Gelöstem in der Umgebung der Ionen statthabende Entmischung zurück. Die hierdurch bedingte Änderung der partiellen freien Energien der Ionen bedingt den Aussalz- bzw. Einsalzeffekt. In der vorliegenden Arbeit wird darauf aufmerksam gemacht, daß bei der Debyeschen Berechnungsweise der freien Energie den Schwankungen nicht Rechnung getragen wird, welche in der Umgebung eines Ions für die Moleküle des Gelösten statthaben. Diese werden hier (Dipolmoleküle des Gelösten vorausgesetzt) unter gewissen Annahmen berücksichtigt, wodurch die quantitative Gesetzmäßigkeit im Falle des Einsalzeffektes vollständig geändert wird. Der erhaltene Ausdruck für die freie Energie wird benutzt zur Diskussion des Einflusses neutraler Moleküle mit Dipolcharakter auf das Gleichgewicht teilweise dissoziierter Elektrolyte. Anwendungen werden in einer folgenden Arbeit gegeben [*J. Chem. Phys.* 2, 188 (1934)].

*E. Hückel* (Stuttgart).

**Wereide, Thorstein:** Grundlage einer statistischen Thermodynamik der Molekularsysteme. *Z. Physik* 88, 469—494 (1934).

**Peierls, R.:** Bemerkungen zur Theorie der Metalle. Antwort auf die Kritik von E. Kretschmann. *Z. Physik* 88, 786—791 (1934).

Auf die beiden Einwände von Kretschmann [*Z. Physik* 87, 518 (1934); dies. Zbl. 8, 186] gegen die Blochsche Theorie des elektrischen Widerstandes wird geantwortet 1., daß die „Resonanzbedingung“ von Kretschmann zwar im wesentlichen richtig sei, aber auch bei nicht strenger Erfüllung der Charakter der Theorie nicht geändert wird; 2. daß die Kritik gegen die Beschleunigungsformel für die Elektronen im Kristallfeld auf einem Trugschluß beruhe.

*Nordheim* (Paris).

**Kretschmann, Erich:** Über die Resonanzbedingung und über die Beschleunigung der Elektronen in der Blochschen Theorie der Elektrizitätsleitung. Entgegnung an R. Peierls. *Z. Physik* 88, 792—799 (1934).

(Vgl. vorsteh. Referat.) Verf. hält seinen ersten Einwand (Nichterfüllung der Resonanzbedingung) als wesentlich aufrecht, schließt sich dagegen hinsichtlich des zweiten (Beschleunigungsformel) der Blochschen Auffassung an.

*Nordheim*.

**Sergeiev, M. I., and M. G. Tchernikovskiy:** The optical constants of alkaline metals. *Physik. Z. Sowjetunion* 5, 106—114 (1934).

Ausgehend von der Tatsache, daß die Leitungselektronen der Alkalien in besonders hohem Maße als frei betrachtet werden dürfen, zeigen die Verf., daß die Quantentheorie der Dispersion in Metallen, auf diese Stoffe angewandt, zu geschlossenen Ausdrücken für Leitfähigkeit und dielektrische Konstante, und also auch für Brechungsexponent und Extinktionskoeffizient führt, die nur eine willkürliche Konstante enthalten. Durch geeignete Wahl dieser Konstante kann der theoretische Verlauf der optischen Eigenschaften mit dem allerdings spärlichen, experimentellen Material für Na und K in gute Übereinstimmung gebracht werden. *R. de L. Kronig* (Groningen).

**Blochinzew, D.:** Zur Theorie der Elektronenbewegung im Kristallgitter. *Physik. Z. Sowjetunion* 5, 316—343 (1934).

Verf. untersucht zunächst unter der Voraussetzung stark gebundener Elektronen, wie sich die Energiezonen, welche aus einem *S*- und einem *P*-Term des isolierten Atoms entstehen, gegenseitig stören, vor allem auch für den Fall, daß der Abstand dieser Terme klein ist, verglichen mit der Zonenbreite. Sodann wird gezeigt, wie der bekannte, durch Linearkombination von Atomeigenfunktionen entstehende Ausdruck für die



Wellenfunktion stark gebundener Elektronen im Kristallgitter in die Form modularer de Brogliescher Wellen gebracht werden kann, welche man gewöhnlich im Grenzfall loser Bindung benutzt. Die letzten Betrachtungen werden für einen einseitig begrenzten Kristall wiederholt, wo stehende statt fortschreitender Wellen auftreten.

*R. de L. Kronig* (Groningen).

**Tunazima, Nagatosi: Elektrischer Widerstand und Ferromagnetismus.** Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 16, 151—159 (1934).

Experimentell unterscheidet sich der Widerstand eines ferromagnetischen Metalles von dem entsprechender nicht magnetischer Metalle durch ein Zusatzglied. Als Funktion der Temperatur ist dieses Glied proportional der Differenz aus dem Quadrat der Sättigungsmagnetisierung und dem der spontanen Magnetisierung für die betreffende Temperatur. Verf. zeigt nun, daß dieses Gesetz sich mit Hilfe quantenmechanischer Rechnungen aus einer Reihe von Annahmen herleiten läßt, die u. a. den zu beweisenden Satz enthalten.

*R. Peierls* (Manchester).

**Hurst, C.: On metallic dispersion in the near infra-red.** Proc. Roy. Soc. London A 144, 377—381 (1934).

Das optische Verhalten von Metallen im nahen Ultrarot wurde von Drude (1900) nach der klassischen Theorie von Kronig nach der Quantenmechanik berechnet. Es wird darauf hingewiesen, daß bei den beiden Behandlungsweisen die Annahmen analog und die Resultate identisch sind.

*E. Teller* (Kopenhagen).

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Einaudi, R.: Sulla propagazione delle onde sismiche.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 19, 33—37 (1934).

The surface of the earth is treated as an infinite plane  $z = 0$  and the focus of an earthquake is taken as the origin being assumed to be approximately the same as the epicentre. — It is found that the condition of no stress at the surface can be satisfied by a disturbance starting at the focus and represented by components of elastic displacement of type

$$S_x = yr^{-2}f'_3 - yr^{-3}f_3, \quad S_y = xr^{-3}f_3 - xr^{-2}f'_3, \quad S_z = 0$$

where  $f_3 = f_3(r - V_1 t)$  and  $\varrho V_1^2 = \mu$ . This wave has a horizontal transverse vibration like a Love-wave and may represent the first principal phase of an earthquake. — The wave corresponding to the solution

$$S_x = xr^{-2}\Phi' - xr^{-3}\Phi - zr^{-2}f'_2 + zr^{-3}f_2, \quad S_y = yr^{-2}\Phi' - yr^{-3}\Phi - zr^{-2}f'_1 + zr^{-3}f_1, \\ S_z = xr^{-2}f'_2 - xr^{-3}f_2 - yr^{-2}f'_1 + yr^{-3}f_1 + zr^{-2}\Phi' - zr^{-3}\Phi,$$

(in which  $\Phi \equiv \Phi(r - V_2 t)$ ,  $\varrho V_2^2 = \lambda + 2\mu$ ,  $f_1 = f_1(r - V_1 t)$ ,  $f_2 = f_2(r - V_1 t)$ ) does not satisfy the condition of no stress at the surface and if originating in the interior must be combined with a reflected wave. Near the focus it will evidently produce local perturbations which may be the origin of the Rayleigh-wave which is usually identified with the second principal phase.

*H. Bateman* (Pasadena).

**Nishimura, Genrokuro, and Kiyoshi Kanai: On the effects of discontinuity surfaces upon the propagation of elastic waves. II.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 11, 595—631 (1933).

In a previous study (see this Zbl. 7, 277) the authors discussed the initial motion at the free surface of a stratified semi-infinite solid when seismic waves are propagated across a horizontal slip surface. The present paper deals with the steady state motion, taking account of multiple reflections in the superimposed layer. A harmonic train of plane dilatational waves is obliquely incident upon the slip surface of the layer from beneath. A total of six boundary conditions at the free and slip surfaces must be simultaneously satisfied in the steady state. The problem is solved by standard methods by introducing six waves and determining their amplitude coefficients to meet



the boundary conditions. The resulting algebraic expressions for the components of the particle displacements are very complicated, but some simplification results if the media on either side of the slip plane be identical. For this case, computations of the motion of the ground's surface were carried out for angles of emergence (beneath the slip surface)  $e = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ , and for a range of ratios,  $H/L$ , of layer thickness to wave length. The motion interior to the layer was also computed for  $e = 30^\circ$  and for varying ratios  $H/L$ . In the layer and on its surface, the particle executes an elliptical orbit with one axis of the ellipse vertical. The lengths of the axes are circular functions of the ratio  $H/L$ . The motion of the lower medium at the common boundary is also elliptical, but the axes are in general inclined and both the lengths and inclination are circular functions of  $H/L$ . The computed motions are fully exhibited by a series of diagrams. *Slichter* (Cambridge).

**Schmidt, Adolf:** Der magnetische Mittelpunkt der Erde und seine Bedeutung. Gerlands Beitr. Geophys. 41, 346—358 (1934).

W. Thomson definierte als magnetischen Mittelpunkt eines Magnets den Ursprung  $O'$  eines Polarkoordinatensystems, dessen Achse parallel zur magnetischen Achsenrichtung ist, und in dem die Kugelfunktionenreihe, die das Potential des Magnets darstellt, von den 5 Gliedern zweiter Ordnung nur die sektoriellen enthält. Hier wird gezeigt, daß diese Definition ersetzt werden kann durch folgende: „Der magnetische Mittelpunkt ist der gemeinsame Ursprung der Koordinatensysteme, in denen der absolute Gesamtbetrag der Glieder zweiter Ordnung seinen kleinstmöglichen Wert hat.“ Mit anderen Worten: Vom magnetischen Mittelpunkt aus betrachtet, zeigt das Feld eines Magnets die größte Annäherung an das Feld eines Dipols oder einer homogen magnetisierten Kugel. Mit Hilfe dieser Minimumsbedingung werden Formeln abgeleitet, um aus den Koeffizienten der Kugelfunktionenreihe in bezug auf ein Koordinatensystem mit beliebigem Anfangspunkt  $O$  die Koordinaten von  $O'$  zu berechnen. Zu den bisher allein betrachteten Invarianten, dem magnetischen Moment und der Achsenrichtung, tritt nun der magnetische Mittelpunkt. Er wird für das magnetische Feld der Erde berechnet und in seiner anschaulichen und physikalischen Bedeutung betrachtet, im Zusammenhang mit der unsymmetrischen Verteilung der Horizontalintensität am magnetischen Äquator der Erde. *J. Bartels* (Berlin-Eberswalde).

**Fiehot, E.:** Sur les ondes de Poincaré de deuxième espèce. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1091—1094 (1934).

A special type of wave is discussed, having the cotidal function

$$\varphi = \frac{gk}{\mu^2} \left( \frac{4\pi^2}{k^2} \sin^2 \frac{m\pi y}{b} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2} \cos^2 \frac{m\pi y}{b} \right) \exp \left\{ -\frac{\mu x}{k} + i(\mu t - \theta) \right\},$$

where  $\tan \theta = (m\pi k/2\omega b) \cot(m\pi y/b)$ ; such waves, of long period, and with  $m$  large, could occur in a narrow deep canal near to the pole, and might be excited if the ends of the canal opened on to the oceans in regions where the cotidal lines were very close together, and depended on the same cotidal function, though these conditions are improbable in the actual oceans. *Chapman* (London).

**Piccard, Auguste:** Sur la constitution des rayons cosmiques. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 1683—1685 (1934).

**Schallhorn, Konrad:** Koordinaten-Umwandlung mit Hilfe von Zahlen- und graphischen Tafeln. Z. Vermessgswes. 63, 255—259 (1934).

**Hristoff, Wl. K.:** Weitere Bemerkungen zu Krügers Koordinaten-Transformationen. Z. Vermessgswes. 63, 246—250 (1934).

**Lüdemann, Karl:** Beiträge zu einem Voranschlag der Winkelmeßgenauigkeit bei der Einschaltung von Kleindreiecks- und Zugsunkten. Allg. Vermessgsw.-Nachr. 46, 318 bis 327 (1934).